EDHEC 1994 exercice 1

α désigne un nombre réel fixé supérieur ou égal à 1, et on pose :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} \, dt \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^n \, dt$$

Q1 Montrer que l'intégrale I est absolument convergente.

On fait Q2'

Q2 a) Calculer I_0.

b) Pour $n \geqslant 1$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que si I_{n-1} est convergente, il en est de même de I_n, et trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.

c) En déduire la convergence de I_n et la valeur de I_n en fonction de n et α.

Q2' n est dans $\mathbb{N}$. Montrer que I_n converge et donner sa valeur.

Q3 a) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

b) n appartient à $\mathbb{N}$. Montrer que : $\left| I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!} \right) \right| \leqslant K I_{2n+1}$ K étant un nombre réel que l'on précisera en fonction de n.

c) En déduire : $I = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}} \right)$.

Q4 On pose, pour tout réel x : $\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall t \in [0,1], \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [0,1], \ \left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan(x) \right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$.

c) En déduire une expression très simple de I en fonction de α utilisant la fonction arctan.

Q1 Posons $\forall t \in]0,+\infty[$, $f_\alpha(t) = e^{-\alpha t}\dfrac{\sin t}{t}$. f_α est continue sur $]0,+\infty[$.

$f_\alpha(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1 \times \dfrac{t}{t} = 1$. Alors $\lim\limits_{t\to 0} f_\alpha(t) = 1$. Donc f_α est prolongeable par continuité en 0.

Alors $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$ converge. Or $\forall t \in]0,1]$, $f_\alpha(t) \geqslant 0$ donc $\int_0^1 |f_\alpha(t)|\,dt$ converge.

Remarque.. Nous noterons dans la suite $\hat{f}_\alpha$ le prolongement par continuité de f_α à 0.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[$, $\hat{f}_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}\dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t>0 \\ 1 & \text{si } t=0 \end{cases}$.

croissance comparée

$\forall t \in [1,+\infty[$, $|t^2 f_\alpha(t)| = t^2 e^{-\alpha t}\dfrac{|\sin t|}{t} = t e^{-\alpha t}|\sin t| \leqslant t e^{-\alpha t}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}(t e^{-\alpha t}) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\alpha}\,\dfrac{\alpha t}{e^{\alpha t}}\right) = 0$

Alors par encadrement $\lim\limits_{t\to+\infty} |t^2 f_\alpha(t)| = 0$ ou $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 |f_\alpha(t)| = 0$.

Ainsi 1/ $|f_\alpha(t)| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

2/ $\forall t \in [1,+\infty[$, $|f_\alpha(t)| \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.

3/ $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}\,dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_1^{+\infty} |f_\alpha(t)|\,dt$.

Finalement $\int_0^{+\infty} |f_\alpha(t)|\,dt$ converge. Alors $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$ est absolument convergente.

Remarque.. Notons qu'alors $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$ est convergente.

Q2 Version 1.. Celle du texte.

a) $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\forall A \in [0,+\infty[$, $\int_0^A e^{-\alpha t}\,dt = \left[\dfrac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\right]_0^A = \dfrac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha A})$.

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-\alpha t}\,dt = \dfrac{1}{\alpha}$. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{\alpha}$.

I_0 existe et $I_0 = \dfrac{1}{\alpha}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. ~~Supposons que I_{n-1} converge.~~

$u : t \mapsto t^n$ et $v : t \mapsto -\dfrac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et

$\forall t \in [0,+\infty[$, $u'(t) = n t^{n-1}$ et $v'(t) = e^{-\alpha t}$.

En intégrant par parties on obtient alors :

$\forall A \in [0,+\infty[, \int_0^A t^n e^{-\alpha t}dt = [t^n(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t})]_0^A - \int_0^A n t^{n-1}(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t})dt = -\frac{1}{\alpha}A^n e^{-\alpha A} + \frac{n}{\alpha}\int_0^A t^{n-1}e^{-\alpha t}dt.$

Or $\lim_{A\to+\infty}(A^n e^{-\alpha A}) = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha^n}\frac{(\alpha A)^n}{e^{\alpha A}}\right) = 0$ par croissance comparée. ($\alpha>0$!)

Nous avons supposé que I_{n-1} converge.

Alors $\lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^A t^n e^{-\alpha t}dt\right) = \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}A^n e^{-\alpha A} + \frac{n}{\alpha}\int_0^A t^{n-1}e^{-\alpha t}dt\right) = \frac{n}{\alpha}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-\alpha t}dt.$

Donc $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t}dt$ converge et $I_n = \frac{n}{\alpha}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-\alpha t}dt$ ou $I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}$.

Si $n\in\mathbb{N}^*$ et si I_{n-1} est convergente alors I_n converge et $I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}$.

c) Remarque.. Supposons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, I_n converge.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n!}\alpha^n I_n = \frac{1}{(n-1)!}\alpha^{n-1}I_{n-1}$.

Donc $\left(\frac{1}{n!}\alpha^n I_n\right)_{n\geq 0}$ est une suite constante. Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{n!}\alpha^n I_n = \frac{1}{0!}\alpha^0 I_0 = I_0 = \frac{1}{\alpha}$

donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$. Fin de la remarque !

Montrons alors que pour tout $n\in\mathbb{N}$, I_n converge et vaut $\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ ... par récurrence.

→ C'est clair pour $n=0$ d'après a)

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ et montrons la pour n.

Par hypothèse I_{n-1} converge et vaut $\frac{(n-1)!}{\alpha^{(n-1)+1}}$. b) montre alors que

I_n converge et que $I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}$

donc I_n converge et $I_n = \frac{n}{\alpha}\frac{(n-1)!}{\alpha^n} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ ce qui achève la récurrence.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, I_n converge et $I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

Version 2. Utilisation de Γ qui n'était pas au programme en 1993.

soit $n\in\mathbb{N}$. $t\mapsto e^{-\alpha t}t^n$ est continue sur $[0,+\infty[$.

$t\mapsto \alpha t$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. Cela justifie le changement de variable $u=\alpha t$ dans ce qui suit.

$\forall A \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^A e^{-\alpha t}\, t^n\, dt \underset{u=\alpha t}{=} \int_0^{\alpha A} e^{-u}\left(\frac{u}{\alpha}\right)^n \frac{1}{\alpha}\, du = \frac{1}{\alpha^{n+1}}\int_0^{\alpha A} e^{-u} u^n\, du.$

Or $\displaystyle\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{(n+1)-1}\, du$ converge et vaut $((n+1)-1)!$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u} u^n\, du$ converge et vaut $n!$

Alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^A e^{-\alpha t} t^n\, dt\right) = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha^{n+1}}\int_0^{\alpha A} e^{-u} u^n\, du\right) \overset{\substack{\alpha>0 \text{ donc } \lim_{A\to+\infty}(\alpha A) = +\infty \\ \downarrow}}{=} \frac{1}{\alpha^{n+1}} \times n! = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$

donc $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^n\, dt$ converge et vaut $\dfrac{n!}{\alpha^{n+1}}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Q3 a) Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sin x$. φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \times \frac{\pi}{2}\right)$ (récurrence simple...)

En particulier $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(k)}(0) = \sin\left(k \times \frac{\pi}{2}\right)$. Soit $n \in \mathbb{N}$

En appliquant à φ l'inégalité de Taylor-Lagrange, à l'ordre $2n+1$ en 0, il vient :

$$\left|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(x-0)^k}{k!}\varphi^{(k)}(0)\right| \leqslant \frac{|x-0|^{2n+2}}{(2n+2)!} \max_{t\in[0,x]} |\varphi^{(2n+2)}(t)| \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}^+.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left|\sin x - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!}\sin\left(k\times\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\max_{t\in[0,x]}\left|\sin\left(t + k\times\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Notons que si k est pair : $\sin\left(k\times\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Alors $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left|\sin x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$

Or $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \sin\frac{\pi}{2} = (-1)^k$.

Donc $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left|\sin x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ ou

---

$\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

---

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,+\infty[$ en multipliant l'inégalité précédente par $\left|\dfrac{e^{-\alpha x}}{x}\right|$

il vient : $\displaystyle\left|e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha x} x^{2k}\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\left|\frac{e^{-\alpha x}}{x}\right| = \frac{1}{(2n+2)!} e^{-\alpha x} x^{2n+1}$

donc $\left|\hat{f}_\alpha(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha x} x^{2k}\right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} e^{-\alpha x} x^{2n+1}$.

Posons $\forall x \in [0, +\infty[$, $\psi(x) = \hat{f}_\alpha(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha x} x^{2k}$

Nous venons de voir que $\forall x \in]0, +\infty[$, $|\psi(x)| \leq \frac{1}{(2n+2)!} e^{-\alpha x} x^{2n+1}$.

Or $\hat{f}_\alpha$ vaut 1 en 0 de même que $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha x} x^{2k}$. Alors l'inégalité précédente vaut
OK ?
encore pour $x = 0$.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $|\psi(x)| \leq \frac{1}{(2n+2)!} e^{-\alpha x} x^{2n+1}$ or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!} e^{-\alpha x} x^{2n+1} dx$ converge et vaut $\frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$. Alors :

1) $\int_0^{+\infty} |\psi(x)| dx$ converge donc $\int_0^{+\infty} \psi(x) dx$ est absolument convergente donc convergente, ce qui n'est pas un scoop !

2) $\left|\int_0^{+\infty} \psi(x) dx\right| \leq \int_0^{+\infty} |\psi(x)| dx$

3) $\int_0^{+\infty} |\psi(x)| dx \leq \frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$.

4) $\int_0^{+\infty} \psi(x) dx = \int_0^{+\infty} \left[e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha x} x^{2k} \right] dx$ or

$\int_0^{+\infty} \psi(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^{2k} dx$ car toutes les intégrales convergent, ou encore $\int_0^{+\infty} \psi(x) dx = I - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} I_{2k}$.

Alors $\left| I - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} I_{2k} \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$ ou

$\left| I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!} \right) \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

<u>Remarque</u> .. Nous oublierons pudiquement le K qui est du KK ...

c) $\forall n\in\mathbb{N},\ \left|I-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}I_{2k}\right|\leq\frac{1}{(2n+2)!}I_{2n+1}=\frac{1}{(2n+2)!}\times\frac{(2n+1)!}{\alpha^{2n+2}}=\frac{1}{2n+2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2n+2}\underset{\alpha\geq 1}{\leq}\frac{1}{2n+2}.$

Or $\forall k\in\mathbb{N},\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}I_{2k}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\times\frac{(2k)!}{\alpha^{2k+1}}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)\alpha^{2k+1}}.$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ \left|I-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\alpha^{2k+1}}\right|\leq\frac{1}{2n+2}$. Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+2}=0$. Donc par encadrement

il vient $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\alpha^{2k+1}}=I}}$ ou $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{3\alpha^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}\right)=I}}$.

__Remarque__.. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}=I=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}\,dt$.

Q4 a) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[0,1],\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}=\sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k\underset{-t^2\neq 1}{=}\frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)}=\frac{1}{1+t^2}+(-1)^{n+2}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$ ← ou n !

Alors $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[0,1],\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}-\frac{1}{1+t^2}=(-1)^n\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}}}$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $x\in[0,1]$. Intégrons l'égalité précédente entre 0 et x.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^x t^{2k}\,dt-\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.$$

Alors $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}-\arctan x=(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.$

donc $\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}-\arctan x\right|=\left|(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right|=\left|\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right|\underset{x\geq 0}{\leq}\int_0^x\left|\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right|dt=\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.$

$\forall t\in[0,x],\ t^{2n+2}\geq 0$ et $\frac{1}{1+t^2}\leq 1$ donc $\forall t\in[0,x],\ \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\leq t^{2n+2}$.

Alors $\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\leq\int_0^x t^{2n+2}\,dt=\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\leq\frac{1}{2n+3}$ car $x\in[0,1]$.

Ainsi $\underline{\underline{\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}-\arctan x\right|\leq\frac{1}{2n+3}\text{ et ceci pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N} \text{ et pour tout}}}$

$\underline{\underline{x \text{ dans } [0,1]}}$

$\mathbb{N}^*$ si vous voulez faire plaisir au concepteur.

<u>Remarque</u>.. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$. Alors par encadrement il vient :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan(x) \ldots \text{ pour tout } x \text{ dans } [0,1]$$

Donc pour tout x dans $[0,1]$ la série de terme général $(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$. Par imparité ceci vaut encore pour tout $x \in [-1,1]$.

Pour $x = 1$ on retrouve un résultat classique : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \ldots$

c) $$I \underset{\substack{\uparrow \\ \text{remarque de §3 c)}}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\alpha^{2n+1}} = \sum_{n=0} (-1)^n \frac{(1/\alpha)^{2n+1}}{2n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Remarque précédente } (1/\alpha \in [0,1]).}}{=} \arctan \frac{1}{\alpha}. \qquad \underline{\underline{I = \arctan \frac{1}{\alpha}.}}$$

$$\forall \alpha \in [1,+\infty[, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t}\, dt = \arctan \frac{1}{\alpha} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car connu } (\alpha>0)..}}{=} \frac{\pi}{2} - \arctan \alpha$$