Exercice 1

Préliminaire.. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ avec a réel strictement positif.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - a| \leq \varepsilon$

Posons $\varepsilon = \frac{a}{2}$; $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ donc : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - a| \leq \varepsilon = \frac{a}{2}$.

Si $n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $a - u_n = -(u_n - a) \leq |u_n - a| \leq \frac{a}{2}$; donc $a - \frac{a}{2} \leq u_n$; où : $u_n \geq \frac{a}{2}$.

Finalement : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq \frac{a}{2}$.

Q1 - f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - 2x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$		0		$1/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	−		−	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Remarquons encore que : $f([0,1]) = [0, \frac{1}{4}]$; $f(]0,1[) =]0, \frac{1}{4}]$; f est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$; $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$; $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x = -x^2 \leq 0$

Q2 a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.

- $u_0 \in]0,1[$ donc $u_1 = f(u_0) \in]0, \frac{1}{4}[$.

  Par conséquent : $0 < u_1 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$, la propriété est vraie pour $n = 1$.

- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$

  $0 < u_n < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$. f étant strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ il vient :

  $0 < f(u_n) < f(\frac{1}{n+1})$; c'est à dire : $0 < u_{n+1} < \frac{1}{n+1}(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{n}{(n+1)^2}$

donc $0 < u_{n+1} < \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+2} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{n+2} - \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{(n+2)(n+1)^2} < \frac{1}{n+2}$

ce qui achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n < \frac{1}{n+1}$ et $u_0 \in]0,1[$ donc $0 < u_0 < \frac{1}{0+1}$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.

Par encadrement ceci montre que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_{n+1} - v_n = (n+1)u_{n+1} - n u_n = (n+1)(u_n - u_n^2) - n u_n$

$v_{n+1} - v_n = u_n [1 - (n+1)u_n] = (n+1)u_n \left[\frac{1}{n+1} - u_n\right]$

D'après l'encadrement précédent : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n > 0$.

La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n = n\,u_n < \frac{n}{n+1} < 1$; $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée par 1 ; cette suite converge et sa limite L vérifie : $L \leqslant 1$.

De plus : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n \geqslant v_1$; par passage à la limite : $L \geqslant v_1 = u_1 > 0$.

Finalement $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge et sa limite L appartient à $]0,1]$.

c) $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n = n\left[(n+1)u_{n+1} - n u_n\right] = n\left[(n+1)(u_n - u_n^2) - n u_n\right] = n u_n\left[1-(n+1)u_n\right]$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n = v_n\left(1-\frac{n+1}{n}v_n\right)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} = 1$

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L(1-1\times L) = L(1-L)$.

$(w_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $L(1-L)$.

Q3 et Q4 On suppose ici que : $L\neq 1$. Alors $L(1-L) > 0$. Comme $(w_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $L(1-L)$ le préliminaire montre que :

$\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant n_0 \Rightarrow w_n \geqslant \frac{L(1-L)}{2}$; ce qui s'écrit encore :

$\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant n_0 \Rightarrow v_{n+1}-v_n \geqslant \frac{L(1-L)}{2n}$

(Remarquer que $w_n = n(v_{n+1}-v_n) \geqslant \frac{L(1-L)}{2} > 0$ donne $n\neq 0$! ...)

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant n_0+1$

$$\sum_{k=n_0}^{n-1}(v_{k+1}-v_k) \geqslant \frac{L(1-L)}{2}\sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{k} \quad ; \quad v_n - v_{n_0} \geqslant \frac{L(1-L)}{2}\sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{k}$$

Donc $v_n \geqslant v_{n_0} + \frac{L(1-L)}{2}\sum\limits_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{k}$

La série de terme général $\frac{1}{k}$ est divergente et à termes positifs ; par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{k} = +\infty$; comme $\frac{L(1-L)}{2} > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_{n_0} + \frac{L(1-L)}{2}\sum\limits_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{k}\right) = +\infty$

ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$!! Rappelons que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $L\in]0,1]$!

Donc on ne peut pas avoir $L\neq 1$. Finalement $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1.

Donc $1 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(n\,u_n)$; donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

EXERCICE 2

PARTIE I

Q1 V1 version minimale. Soit $u \in \mathrm{Ker}\, s$; $s(u)=0_E$; $s(s(u))=s(0_E)=0_E$

Comme $s\circ s=i$: $0_E=s(s(u))=i(u)=u$; $u=0_E$.

Finalement $\mathrm{Ker}\, s=\{0_E\}$. s est un endomorphisme injectif de E et E est de dimension finie donc s est un automorphisme de E. <u>s est une bijection de E sur E.</u>

$s\circ s=i$; $s^{-1}\circ s\circ s=s^{-1}\circ i$; $i\circ s=s^{-1}\circ i$; $s=s^{-1}$; <u>$s^{-1}=s$.</u>

V2 .. On n'utilise pas la structure d'espace vectoriel de E

. Pour tout $v\in E$, $s(s(v))=i(v)=v$; pour tout v dans E, $s(v)$ est <u>un</u> antécédent de v par s dans E ; s est surjective.

- $\forall (u,u')\in E^2$, $s(u)=s(u') \Rightarrow s(s(u))=s(s(u')) \Rightarrow i(u)=i(u') \Rightarrow u=u'$. s est injective.

Donc s est bijective et pour tout $v\in E$, $s(v)$ est <u>l</u>'antécédent de v par s dans E ; par conséquent s est bijective et $s^{-1}=s$.

Remarque .. V2 montre que si f est une application d'un ensemble X dans lui-même telle que : $f\circ f=\mathrm{Id}_X$ alors f est bijective et $f^{-1}=f$.

Q2. Soit λ une valeur propre de s. $\exists u\in E$, $u\neq 0_E$ et $s(u)=\lambda u$.

$u=s(s(u))=s(\lambda u)=\lambda s(u)=\lambda\lambda u=\lambda^2 u$. Or $u\neq 0_E$ donc : $\lambda^2=1$; $\lambda=1$ ou -1

<u>Si λ est une valeur propre de s : $\lambda=1$ ou $\lambda=-1$. $\mathrm{Spec}\, s\subset\{-1,1\}$.</u>

Q3 a) $(s-i)\circ(s+i)=s^2+s\circ i-i\circ s-i\circ i=s^2+s-s-i=s^2-i=\Theta$

<u>$(s-i)\circ(s+i)=\Theta$</u>

b) $s+i\neq\Theta$, donc $\exists u\in E$, $(s+i)(u)\neq 0_E$. Posons $v=(s+i)(u)$. $v\neq 0_E$.

$(s-i)(v)=(s-i)((s+i)(u))=((s-i)\circ(s+i))(u)=\Theta(u)=0_E$

Donc $s(v)-v=0_E$. Par conséquent : $v\neq 0_E$ et $s(v)=v$.

<u>1 est valeur propre de s.</u>

De même : $s-i\neq\Theta$; $\exists u'\in E$, $(s-i)(u')\neq 0_E$. Posons $v'=(s-i)(u')$; $v'\neq 0_E$.

Remarquons que : $(s+i)\circ(s-i)\underset{\substack{\uparrow\\ s\circ i=i\circ s\,!}}{=}s^2-i^2=s^2-i=\Theta$

donc $(s+i)(v')=(s+i)((s-i)(u'))=((s+i)\circ(s-i))(u')=\Theta(u')=0_E$

Donc $s(v')+v'=0_E$. Par conséquent : $v'\neq 0_E$ et $s(v')=-v'$. <u>-1 est valeur propre de s.</u>

Remarque.. Q3 a) et b) donnent : $\operatorname{Spec} s = \{-1,1\}$.

(Q4) Montrons que : $\forall x \in E,\ \exists!(u,v) \in \operatorname{Ker}(s-i) \oplus \operatorname{Ker}(s+i)$, $x = u+v$

Analyse/Unicité.. Soit $x \in E$. Supposons que $x = u+v$ avec $u \in \operatorname{Ker}(s-i)$ et $v \in \operatorname{Ker}(s+i)$.

Alors $s(u) = u$ et $s(v) = -v$

Donc $\begin{cases} x = u+v \\ \text{et} \\ s(x) = s(u)+s(v) = u-v \end{cases}$

Donc $x+s(x) = 2u$ et $x-s(x) = 2v$; $\underline{u = \frac{1}{2}(x+s(x)) \text{ et } v = \frac{1}{2}(x-s(x))}$; ce qui prouve l'unicité de la décomposition...

Synthèse/Existence.. Soit $x \in E$. Posons $u = \frac{1}{2}(x+s(x))$ et $v = \frac{1}{2}(x-s(x))$

1°.. $u+v = \frac{1}{2}(x+s(x)) + \frac{1}{2}(x-s(x)) = x$

2°.. $s(u) = \frac{1}{2}[s(x) + s\circ s(x)] = \frac{1}{2}[s(x)+x] = u$; $u \in \operatorname{Ker}(s-i)$.

3°.. $s(v) = \frac{1}{2}[s(x) - s\circ s(x)] = \frac{1}{2}[s(x)-x] = -v$; $v \in \operatorname{Ker}(s+i)$

Donc $x = u+v$ avec $u \in \operatorname{Ker}(s-i)$ et $v \in \operatorname{Ker}(s+i)$, ce qui montre l'existence de la décomposition.

Donc $\underline{\underline{\forall x \in E,\ \exists!(u,v) \in \operatorname{Ker}(s-i) \times \operatorname{Ker}(s+i), \text{ et : } E = \operatorname{Ker}(s-i) \oplus \operatorname{Ker}(s+i)}}$.

PARTIE II Notons que : $S = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\}$ et $A = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M\}$

(Q1).. * - $S \neq \emptyset$ car $I \in S$

- Soit $(M,N) \in S^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$

${}^t(M+\lambda N) = {}^tM + \lambda\, {}^tN = M + \lambda N$; donc $M+\lambda N \in S$

S est donc un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

* - $A \neq \emptyset$ car $0_{M_n(\mathbb{R})} \in A$

- Soit $(M,N) \in A^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$

${}^t(M+\lambda N) = {}^tM + \lambda\, {}^tN = -M + \lambda(-N) = -(M+\lambda N)$; donc $M+\lambda N \in A$

A est donc un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

(Q2) Montrons que : $\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ \exists!(U,V) \in S \times A$, $M = U+V$.

<u>Unicité</u>.. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Supposons que : $M = U + V$ avec $(U,V) \in S \times A$.

$M = U + V$ et ${}^tM = {}^tU + {}^tV = U - V$

$M + {}^tM = 2U$ et $M - {}^tM = 2V$; $U = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $V = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ ... d'où l'unicité.

<u>Existence</u>.. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Posons $U = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $V = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$

1.. $U + V = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM) = M$;

2.. ${}^tU = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t{}^tM) = \frac{1}{2}({}^tM + M) = U$, $U \in S$;

3.. ${}^tV = \frac{1}{2}({}^tM - {}^t{}^tM) = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -V$, $V \in A$. ... d'où l'existence.

$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \exists! (U,V) \in S \times A$, $M = U + V$. Donc $\underline{\underline{M_n(\mathbb{R}) = S \oplus A}}$.

Q3 . $T \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$ (c'est dans le texte).

. $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $T(T(M)) = {}^t({}^tM) = M$

donc $T \circ T = Id_{M_n(\mathbb{R})}$

De plus $\exists M \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^tM \neq M$ et $\exists N \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^tN \neq -N$ donc T n'est ni $Id_{M_n(\mathbb{R})}$ ni $-Id_{M_n(\mathbb{R})}$. D'après I, T est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(T - Id_{M_n(\mathbb{R})})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(T + Id_{M_n(\mathbb{R})})$.

Or $\mathrm{Ker}(T - Id_{M_n(\mathbb{R})}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid T(M) = M\} = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\} = S$ et

$\mathrm{Ker}(T + Id_{M_n(\mathbb{R})}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid T(M) = -M\} = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M\} = A$.

Donc <u>T est la symétrie par rapport à S et parallèlement à A.</u>

Remarque .. II Q2 était parfaitement inutile ; II Q1 aussi !

$T \circ T = Id_{M_n(\mathbb{R})}$ et $T \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$ donnaient tout.

EXERCICE 3

PARTIE I (Q1) Soit $j\in [\![0,n]\!]$. La série de terme général a_{kj} est convergente. Posons alors $S_j=\sum_{k=0}^{+\infty} a_{kj}$; $S_j=\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p} a_{kj}$.

$\forall p\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{n} a_{kj}=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{p} a_{kj}\right)$; or pour tout $j\in[\![0,n]\!]$, $\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p} a_{kj}=S_j$.

Par conséquent $\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{kj}\right)=\sum_{j=0}^{n} S_j$. Ceci prouve alors que la série de terme général $\sum_{j=0}^{n} a_{kj}$ converge et que : $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{kj}\right)=\sum_{j=0}^{n} S_j=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{kj}\right)$

Finalement : $\underline{\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} a_{kj}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{kj}}$.

<u>Remarque</u> : ceci signifie que la somme d'un nombre fini de séries convergentes est une série convergente de somme la somme des sommes des séries qui la constituent.

(Q2) Posons pour tout $(j,k)\in[\![0,n]\!]\times\mathbb{N}$, $a_{kj}=j\,p(S=j\cap X=k)$

Soit $j\in[\![0,n]\!]$

$0\leq p(S=j\cap X=k)\leq p(X=k)$ car $\{S=j\}\cap\{X=k\}\subset\{X=k\}$

Or la série de terme général $p(X=k)$ est convergente (et de somme 1) car X est une var prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Les règles de comparaison des séries à termes positifs prouvent alors que la série de terme général $p(S=j\cap X=k)$ est convergente ; celle de terme général $a_{kj}=j\,p(S=j\cap X=k)$ aussi !

Nous pouvons alors appliquer Q1 et nous obtenons alors :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} j\,p(S=j\cap X=k)}_{\alpha}=\underbrace{\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty} j\,p(S=j\cap X=k)}_{\beta}$$

$$\alpha=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} j\,p(S=j/X=k)\,p(X=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}p(X=k)\sum_{j=0}^{n} j\,p(S=j/X=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}p(X=k)\,E(S_{/X=k})$$

$$\beta=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty} j\,p(S=j\cap X=k)=\sum_{j=0}^{n} j\sum_{k=0}^{+\infty} p(S=j\cap X=k)=\sum_{j=0}^{n} j\,p(S=j)=E(S)$$

$(\{X=k\})_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet... ou quasi-complet d'événements.

Finalement $\underline{\underline{E(S) = \sum_{k=0}^{+\infty} E(S/X=k)\,p(X=k)}}$.

PARTIE II

(Q1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que l'ascenseur contient au départ $k+1$ passagers. On note A_ℓ l'événement les k premiers passagers ont choisi ℓ étages et cela pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$. $(A_\ell)_{\ell\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements. Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Supposons $j \geq 2$.

$p(S_{k+1}=j) = \sum_{\ell=1}^{n} p(S_{k+1}=j \cap A_\ell)\, p(A_\ell)$

Or $p(S_{k+1}=j \cap A_\ell) = 0$ si $\ell > j$ ou si $\ell < j-1$.

Donc $p(S_{k+1}=j) = p(S_{k+1}=j \cap A_j) + p(S_{k+1}=j \cap A_{j-1})$

Si $p(A_j) \neq 0$: $p(S_{k+1}=j \cap A_j) = p(S_{k+1}=j / A_j)\, p(A_j) \underset{\uparrow}{=} \frac{j}{n} p(A_j)$;

$p(S_{k+1}=j \cap A_j) = \frac{j}{n} p(A_j)$. le $k+1^{\text{ème}}$ passager choisit un des j étages choisis par les k premiers passagers.

Si $p(A_j)=0$: $p(S_{k+1}=j \cap A_j)=0$ car $\{S_{k+1}=j\} \cap A_j \subset A_j$

On a encore $p(S_{k+1}=j \cap A_j) = \frac{j}{n} p(A_j)$!

le $k+1^{\text{ème}}$ passager choisit un des $n-(j-1)$ étages non choisis par les k premiers passagers.

Si $p(A_{j-1}) \neq 0$: $p(S_{k+1}=j \cap A_{j-1}) = p(S_{k+1}=j / A_{j-1})\, p(A_{j-1}) = \frac{n-(j-1)}{n} p(A_{j-1})$

Si $p(A_{j-1}) = 0$: $p(S_{k+1}=j \cap A_{j-1}) = 0$ car $\{S_{k+1}=j\} \cap A_{j-1} \subset A_{j-1}$

On a encore $p(S_{k+1}=j \cap A_{j-1}) = \frac{n-(j-1)}{n} p(A_{j-1})$!

Finalement pour $j \in [\![2,n]\!]$, $p(S_{k+1}=j) = \frac{j}{n} p(A_j) + \frac{n-(j-1)}{n} p(A_{j-1})$

$p(S_{k+1}=1) \underset{\uparrow}{=} p(S_{k+1}=1 \cap A_1) = p(S_{k+1}=1/A_1)\, p(A_1) = \frac{1}{n} p(A_1)$

$\{S_{k+1}=1\} \subset A_1$

Notons encore que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ $p(A_j) = p(S_k=j)$

Donc $\forall j \in [\![2,n]\!]$, $p(S_{k+1}=j) = \frac{j}{n} p(S_k=j) + \frac{n-(j-1)}{n} p(S_k=j-1)$. et

$p(S_{k+1}=1) = \frac{1}{n} p(S_k=1) = \frac{1}{n} p(S_k=1) + \frac{n-1+1}{n} \times 0 = \frac{1}{n} p(S_k=1) + \frac{n-1+1}{n} p(S_k=1-1)$!

"Finalement" : $\underline{\underline{\forall j \in [\![1,n]\!],\ p(S_{k+1}=j) = \frac{j}{n} p(S_k=j) + \frac{n-j+1}{n} p(S_k=j-1) \ldots \text{ pour } k \in \mathbb{N}^*}}$.

Reste à justifier la formule pour $k=0$.

$p(S_0=j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j=0 \\ 0 \text{ si } j \in [\![1,n]\!] \end{cases}$. $p(S_1=j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j=1 \\ 0 \text{ si } j \in [\![2,n]\!] \end{cases}$.

$\frac{j}{n} p(S_0=j) + \frac{n-j+1}{n} p(S_0=j-1) = \begin{cases} \frac{1}{n} \times 0 + \frac{n-1+1}{n} p(S_0=0) = 1 & \text{pour } j=1 \\ \frac{1}{n} \times 0 + \frac{n-j+1}{n} \times 0 = 0 & \text{pour } j \in [\![2,n]\!] \end{cases}$

Donc $p(S_1=j) = \frac{j}{n} p(S_0=j) + \frac{n-j+1}{n} p(S_0=j-1)$.

Donc $\underline{\forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in [\![1,n]\!], p(S_{k+1}=j) = \frac{j}{n} p(S_k=j) + \frac{n-j+1}{n} p(S_k=j-1)}$.

Q2 Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$E(S_{k+1}) = \sum_{j=1}^{n} j\, p(S_{k+1}=j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{n} p(S_k=j) + \sum_{j=1}^{n} \frac{j(n-j+1)}{n} p(S_k=j-1)$$

$\downarrow$ j devient $j+1$

$$= \sum_{\underline{\underline{j=0}}}^{n} \frac{j^2}{n} p(S_k=j) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(j+1)(n-j)}{n} p(S_k=j)$$

$\downarrow$ $n-j=0$ pour $j=n$.

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{j^2}{n} p(S_k=j) + \sum_{j=0}^{n} \frac{(j+1)(n-j)}{n} p(S_k=j)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{j^2+nj+n-j^2-j}{n} p(S_k=j) = \frac{n-1}{n} \sum_{j=0}^{n} j\, p(S_k=j) + \sum_{j=0}^{n} p(S_k=j)$$

$$\underline{E(S_{k+1}) = \frac{n-1}{n} E(S_k) + 1}.$$

Q3 S_0 prend la valeur 0 avec une probabilité égale à 1, $E(S_0)=0$.

$(E(S_k))_{k\geq 0}$ est une suite arithmético-géométrique.

$x \in \mathbb{R}$ et $x = \frac{n-1}{n} x + 1 \iff x = n$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $E(S_{k+1}) - n = \frac{n-1}{n} (E(S_k) - n)$.

$(E(S_k)-n)_{k\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $\frac{n-1}{n}$ et de premier terme $-n$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $E(S_k) - n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k (0-n)$

$\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ E(S_k) = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)}$.

Q4. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$E(S / X=k) = \sum_{j=0}^{n} j\, p(S=j / X=k) = \sum_{j=0}^{n} j\, p(S_k=j) = E(S_k) = n\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$$

donc $$E(S) = \sum_{k=0}^{+\infty} E(S / X=k)\, p(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} n\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$E(S) = ne^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!} - \left(\lambda\frac{n-1}{n}\right)^k\frac{1}{k!}\right)$$

or $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\lambda\frac{n-1}{n}\right)^k\frac{1}{k!} = e^{\lambda\frac{n-1}{n}}$

donc $E(S) = ne^{-\lambda}\left[e^{\lambda} - e^{\lambda\frac{n-1}{n}}\right] = n\left[1 - e^{\lambda\frac{n-1}{n}-\lambda}\right] = n\left[1-e^{-\lambda/n}\right]$

$$\underline{\underline{E(S) = n\left[1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right]}}.$$

PARTIE I PROBLEME

(Q1) a) $p\in\mathbb{N}^*$. $\forall t\in[p,p+1]$, $\frac{1}{p+1}\leq\frac{1}{t}\leq\frac{1}{p}$. En intégrant on obtient :

$$\frac{1}{p+1}=\int_p^{p+1}\frac{dt}{p+1}\leq\int_p^{p+1}\frac{dt}{t}\leq\int_p^{p+1}\frac{dt}{p}=\frac{1}{p}$$

donc : $-\frac{1}{p+1}\geqslant-\int_p^{p+1}\frac{dt}{t}\geqslant-\frac{1}{p}$; et : $\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\geqslant\frac{1}{p}-\int_p^{p+1}\frac{dt}{t}\geqslant 0$

Finalement : $0\leq u_p\leq\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}$.

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_{n+1}-v_n=\sum_{p=1}^{n+1}u_p-\sum_{p=1}^{n}u_p=u_{n+1}\geqslant 0$; $(v_n)_{n\geq1}$ est croissante.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\sum_{p=1}^{n}u_p\leq\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\leq 1$

$(v_n)_{n\geq1}$ est croissante et majorée par 1 ; $(v_n)_{n\geq1}$ converge.

Notons γ la limite de $(v_n)_{n\geq1}$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq v_n\leq 1$ donc $\gamma\in[0,1]$.

(Q2) a) $p\in\mathbb{N}^*$. $u_p=\frac{1}{p}-\int_p^{p+1}\frac{dt}{t}\underset{x=t-p}{=}\frac{1}{p}-\int_0^1\frac{dx}{x+p}=\frac{1}{p}\int_0^1dx-\int_0^1\frac{dx}{x+p}=\frac{1}{p}\int_0^1\underbrace{\left(1-\frac{p}{x+p}\right)}_{\frac{x}{x+p}}dx$

donc $u_p=\frac{1}{p}\int_0^1\frac{x}{x+p}\,dx$.

b) $\forall x\in[0,1]$, $p\leq x+p\leq p+1$

$\forall x\in[0,1]$, $\frac{1}{p+1}\leq\frac{1}{x+p}\leq\frac{1}{p}\leq\frac{1}{p-1}$

$\forall x\in[0,1]$, $\frac{x}{p+1}\leq\frac{x}{x+p}\leq\frac{x}{p-1}$. Intégrons

$$\frac{1}{p+1}\int_0^1x\,dx\leq\int_0^1\frac{x}{x+p}dx=p\,u_p\leq\frac{1}{p-1}\int_0^1x\,dx$$

donc $\frac{1}{p}\,\frac{1}{p+1}\,\frac{1}{2}\leq u_p\leq\frac{1}{p}\,\frac{1}{p-1}\,\frac{1}{2}$

ou encore : $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right]\leq u_p\leq\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right]$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $n+1 \geq 2$ et $\forall p \in [n+1, +\infty[$, $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right] \leq u_p \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right]$

Soit $q \in \mathbb{N}$ et $q \geq n+1$

$$\sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leq \sum_{p=n+1}^{q} u_p \leq \sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right] \text{ ; donc :}$$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{q+1}\right) \leq \sum_{p=n+1}^{q} u_p \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{q}\right)$. En faisant tendre q vers $+\infty$ il vient :

$$\underline{\underline{\frac{1}{2(n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{2n}}}.$$

Q3 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \gamma - v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq \gamma - v_n \leq \frac{1}{2n}$.

v_n est une valeur approchée par défaut de γ à $\frac{1}{2n}$ près et $\frac{1}{2n} \leq 10^{-5} \Leftrightarrow n \geq 50000$

Pour $n = 50\,000$, $\underline{\underline{v_n \text{ est une valeur approchée}}}$ (par défaut) de γ à 10^{-5} près.

<u>Remarques</u>. 1.. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} [\ln(p+1) - \ln(p)]$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - (\ln(n+1) - \ln 1)$

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1).}}$$

2.. $v_{50\,000} \simeq 0,577\,115\,652\,66$

3.. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{2(n+1)} \geq v_n - \gamma \geq -\frac{1}{2n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \geq v_n + \frac{1}{2n} - \gamma \geq 0$

Donc $v_n + \frac{1}{2n}$ est une valeur approchée de γ à $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)}$ près par excès

Notons que : $\frac{1}{2n(n+1)} \leq 10^{-5} \Leftrightarrow n \geq 224$... belle accélération

Donc $v_{224} + \frac{1}{448}$ est une valeur approchée de γ à 10^{-5} près par excès

$v_{224} + \frac{1}{448} \simeq 0,577\;223\;938\;80$. Notons pour finir que $v_n + \frac{1}{2(n+1)}$ est une valeur approchée par défaut de γ à $\frac{1}{2n(n+1)}$ près

PARTIE II

Q1 Pour $k=1$: $f_{k-1}(t)-f_{k-1}(t+1)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}=\frac{1}{t(t+1)}=f_1(t)=1\times f_k(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$.

Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$

Soit $k\in\mathbb{N}$ et $k\geq 2$. $f_{k-1}(t)-f_{k-1}(t+1)=\frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}(t+i)}-\frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}(t+1+i)}=\frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}(t+i)}-\frac{1}{\prod_{i=1}^{k}(t+i)}$ $\underbrace{\qquad}_{i\to i-1}$

$$f_{k-1}(t)-f_{k-1}(t+1)=\frac{1}{\prod_{i=0}^{k}(t+i)}\left[t+k-t\right]=k\,f_k(t)$$

Finalement : $\forall k\in\mathbb{N}^*, \forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ f_{k-1}(t)-f_{k-1}(t+1)=k\,f_k(t)$.

Q2 $k\in\mathbb{N}^*$. Soit $n\in\mathbb{N}$

$$\forall q\in[\![n+1,+\infty[\![,\ \sum_{p=n+1}^{q}f_k(p)=\frac{1}{k}\sum_{p=n+1}^{q}k\,f_k(p)=\frac{1}{k}\sum_{p=n+1}^{q}\left(f_{k-1}(p)-f_{k-1}(p+1)\right)$$

$$\forall q\in[\![n+1,+\infty[\![,\ \sum_{p=n+1}^{q}f_k(p)=\frac{1}{k}\left[f_{k-1}(n+1)-f_{k-1}(q+1)\right]$$

$$\lim_{q\to+\infty}f_{k-1}(q+1)=\lim_{q\to+\infty}\frac{1}{(q+1)(q+2)\cdots(q+1+k-1)}=0$$

$$\text{donc }\lim_{q\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{q}f_k(p)=\frac{1}{k}f_{k-1}(n+1)=\frac{1}{k}\times\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+1+k-1)}=\frac{1}{k}\,\frac{n!}{1\times 2\times 3\times\cdots\times(n+k)}$$

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, la série de terme général $f_k(p)$ converge et

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty}f_k(p)=\frac{n!}{k\,(n+k)!}\quad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

PARTIE III

Q1 a) $p\in\mathbb{N}^*$. $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\frac{1}{p+x}=\frac{p+1}{(p+1)(p+x)}=\frac{p+x+1-x}{(p+1)(p+x)}=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+1}\,\frac{1-x}{p+x}$.

b) $p\in\mathbb{N}^*$. $u_p=\frac{1}{p}\int_0^1\frac{x\,dx}{p+x}=\frac{1}{p}\int_0^1\frac{x}{p+1}dx+\frac{1}{p}\int_0^1\frac{x(1-x)}{(p+1)(p+x)}dx$

$u_p=\frac{1}{p}\frac{1}{p+1}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\frac{1}{p(p+1)}\int_0^1\frac{P_2(x)}{p+x}dx$. $u_p=\frac{1}{2p(p+1)}+\frac{1}{p(p+1)}\int_0^1\frac{P_2(x)}{p+x}dx$.

Q2 a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{P_k(x)}{p+x} = \frac{x(1-x)\cdots(k-1-x)}{p+x} = \frac{1}{p+k}\,\frac{x(1-x)\cdots(k-1-x)(p+k)}{p+x}$$

$$\frac{P_k(x)}{p+x} = \frac{1}{p+k}\,\frac{x(1-x)\cdots(k-1-x)\,(p+x+k-x)}{p+x}$$

$$\frac{P_k(x)}{p+x} = \frac{1}{p+k}\,\frac{x(1-x)\cdots(k-1-x)\cancel{(p+x)}}{\cancel{p+x}} + \frac{1}{p+k}\,\frac{x(1-x)\cdots(k-1-x)(k-x)}{p+x}$$

$$\underline{\underline{\frac{P_k(x)}{p+x} = \frac{P_k(x)}{p+k} + \frac{P_{k+1}(x)}{(p+k)(p+x)}}}.$$

b) Montrons l'égalité par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_p = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{p(p+1)\cdots(p+i)} + \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+k)}\int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}\,dx.$$

– D'après Q1 b) : $u_p = \dfrac{1}{2p(p+1)} + \dfrac{1}{p(p+1)}\displaystyle\int_0^1 \frac{P_2(x)}{p+x}\,dx$

Or $a_1 = \int_0^1 P_1(t)\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$ donc $u_p = \dfrac{a_1}{p(p+1)} + \dfrac{1}{p(p+1)}\displaystyle\int_0^1 \frac{P_2(x)}{p+x}\,dx$; c'est la propriété pour $k=1$

– Supposons la propriété vraie pour $k-1$ ($k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$) et montrons la pour k

L'hypothèse de récurrence donne : $u_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{p(p+1)\cdots(p+i)} + \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+k-1)}\int_0^1 \frac{P_k(x)}{p+x}\,dx$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{P_k(x)}{p+x}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ Q2\,a)}}{=} \frac{1}{p+k}\int_0^1 P_k(x)\,dx + \frac{1}{p+k}\int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}\,dx$, par conséquent

$$u_p = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{p(p+1)\cdots(p+i)} + \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+k-1)}\,\frac{1}{p+k}\,a_k + \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+k-1)} \times \frac{1}{p+k}\int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}\,dx$$

$$u_p = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{p(p+1)\cdots(p+i)} + \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+k)}\int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}\,dx \text{ ; ceci achève la récurrence.}$$

Finalement : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_p = \dfrac{a_1}{p(p+1)} + \dfrac{a_2}{p(p+1)(p+2)} + \cdots + \dfrac{a_k}{p(p+1)\cdots(p+k)} + \dfrac{1}{p(p+1)\cdots(p+k)}\displaystyle\int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}\,dx$

c) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant 2$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant \frac{x(1-x)(2-x)\cdots(k-1-x)}{p+x} = \frac{P_{k+1}(x)}{p+x} \leqslant \frac{1}{p} P_{k+1}(x) \leqslant \frac{1}{p-1} P_{k+1}(x)$$

Par intégration il vient : $0 \leqslant \int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}\,dx \leqslant \frac{1}{p-1}\int_0^1 P_{k+1}(x)$

Donc $\forall p \in [\![2,+\infty[\![, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}\,dx \leqslant \frac{a_{k+1}}{p-1}$.

d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $u_p - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{p(p+1)\cdots(p+i)} = \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+k)} \int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}\,dx$

donc $\quad 0 \leqslant u_p - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{p(p+1)\cdots(p+i)} \leqslant \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+k)} \times \frac{a_{k+1}}{p-1}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in [\![n+2,+\infty[\![$. Sommons l'encadrement précédent pour p variant de $n+1$ à q.

$$0 \leqslant \sum_{p=n+1}^{q} u_p - \sum_{p=n+1}^{q}\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{p(p+1)\cdots(p+i)} \leqslant \sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{(p-1)p(p+1)\cdots(p+k)}\, a_{k+1}$$

$$0 \leqslant \sum_{p=n+1}^{q} u_p - \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+i)} \leqslant a_{k+1} \sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{(p-1)p(p+1)\cdots(p+k)} \qquad (H)$$

Rappelons que $\lim_{q\to+\infty} \sum_{p=n+1}^{q} u_p = r_n$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{q\to+\infty} \sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+i)} = \sum_{p=n+1}^{+\infty} f_i(p) = \frac{n!}{i\,(n+i)!} = \frac{1}{i}\, \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+i)}.$$

$$\sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{(p-1)(p)(p+1)\cdots(p+k)} = \sum_{p=n}^{q-1} \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+k+1)} = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k+1)} + \sum_{p=n+1}^{q-1} f_{k+1}(p)$$

Donc $\displaystyle \lim_{q\to+\infty} \sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{(p-1)p(p+1)\cdots(p+k)} = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k+1)} + \frac{n!}{(k+1)\,(n+k+1)!} = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k+1)} + \frac{1}{(k+1)(n+1)\cdots(n+k+1)}$

$$\lim_{q\to+\infty} \sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{(p-1)p(p+1)\cdots(p+k)} = \frac{k+1+n}{(k+1)\,n(n+1)(n+2)\cdots(n+k+1)} = \frac{1}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}$$

En faisant tendre q vers $+\infty$ dans (H) il vient :

$$0 \leqslant r_n - \sum_{i=1}^{k} a_i \frac{1}{i(n+1)(n+2)\cdots(n+i)} \leqslant a_{k+1} \frac{1}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}.$$

Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$r_{n,k} = r_n - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{i(n+1)(n+2)\cdots(n+i)}$$

Alors : $r_n = \frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{2(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{a_k}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} + r_{n,k}$. avec :

$$0 \leq r_{n,k} \leq \frac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}$$

e) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$: $v_{n,k} = v_n + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{i(n+1)(n+2)\cdots(n+i)}$

$$\gamma = v_n + r_n = v_n + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{i(n+1)(n+2)\cdots(n+i)} + r_{n,k} = v_{n,k} + r_{n,k}$$

Donc $\gamma - v_{n,k} = r_{n,k}$; par conséquent :

$$0 \leq \gamma - v_{n,k} \leq \frac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)} \quad \text{avec } v_{n,k} = v_n + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{i(n+1)(n+2)\cdots(n+i)}.$$

Q3) Nous avons déjà vu que $a_1 = \frac{1}{2}$.

$$a_2 = \int_0^1 P_2(t)\,dt = \int_0^1 t(1-t)\,dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$a_3 = \int_0^1 P_3(t)\,dt = \int_0^1 t(1-t)(2-t)\,dt = \int_0^1 (t^3 - 3t^2 + 2t)\,dt = \left[\frac{t^4}{4} - t^3 + t^2\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4}.$$

$$a_4 = \int_0^1 P_4(t)\,dt = \int_0^1 (t^3 - 3t^2 + 2t)(3-t)\,dt = \int_0^1 (-t^4 + 6t^3 - 11t^2 + 6t)\,dt = \left[-\frac{t^5}{5} + \frac{3}{2}t^4 - \frac{11t^3}{3} + 3t^2\right]_0^1$$

$$a_4 = -\frac{1}{5} + \frac{3}{2} - \frac{11}{3} + 3 = \frac{1}{30}\left[-6 + 45 - 110 + 90\right] = \frac{19}{30}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \; ; \; a_2 = \frac{1}{6} \; ; \; a_3 = \frac{1}{4} \; ; \; a_4 = \frac{19}{30}.$$

$$v_{n,3} = v_n + \frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{2(n+1)(n+2)} + \frac{a_3}{3(n+1)(n+2)(n+3)} = v_n + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{12(n+1)(n+2)} + \frac{1}{12(n+1)(n+2)(n+3)}$$

et $0 \leq \gamma - v_{n,3} \leq \frac{a_4}{4n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{19}{120n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

$v_{n,3}$ est une valeur approchée par défaut de σ à $\dfrac{19}{120\,n(n+1)(n+2)(n+3)}$ près.

Cette dernière suite est décroissante, converge vers 0 vaut sensiblement $1{,}3 \times 10^{-5}$ pour $n = 9$ et $9{,}2 \times 10^{-6}$ pour $n = 10$.

Donc $\underline{\underline{\sigma_{10,3} \text{ est une valeur approchée de } \sigma \text{ à } 10^{-5} \text{ près.}}}$

$\underline{c)}$ Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1)$