# edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD
EDHEC GRADUATE SCHOOL OF BUSINESS

**CONCOURS D'ADMISSION**
**MATHEMATIQUES**
**OPTION GENERALE**

**LUNDI 15 MAI 1995, de 8h à 12h**

---

**La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'appréciation des copies.**

**Sont autorisées:**

-Règles graduées

-Calculatrices de poche, programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21cm de long X 15 cm de large.

**L'épreuve comporte 3 exercices et 1 problème.**

---

## EXERCICE 1

Préliminaire :On rappelle que si $(u_n)$ est une suite réelle , $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ signifie que pour tout réel $\varepsilon > 0$ , il existe un entier naturel $n_0$ tel que pour tout n supérieur ou égal à $n_0$ : $|u_n - a| \leq \varepsilon$ .
En déduire que si $(u_n)$ est une suite réelle convergente de limite a , strictement positive , alors il existe un entier naturel $n_0$ tel que , pour tout n supérieur ou égal à $n_0$ : $u_n \geq \dfrac{a}{2}$ .
Ce résultat pourra être admis dans la suite de l'exercice .

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x.(1-x)$ et la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par la donnée de $u_0$ élément de $]0,1[$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

1 Etudier les variations de f .

2a Montrer que,pour tout entier naturel n : $0 < u_n < \dfrac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in N}$

2b Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = nu_n$ . Montrer que la suite $(v_n)_{n\in N}$ est croissante .
En déduire qu'elle converge et que sa limite L appartient à $]0,1]$ .

2c Pour tout entier naturel n , on pose : $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$ .
Montrer que la suite $(w_n)_{n\in N}$ converge et que sa limite vaut $L(1-L)$.

3 On suppose $L \neq 1$ , montrer en utilisant le préliminaire qu'il existe un entier naturel $n_0$ tel que

$$\forall n \geq n_0 \ , \ v_{n+1} - v_n \geq \frac{L(1-L)}{2n}$$

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ .

4 Montrer à l'aide de la question 2b que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

EXERCICE 2

Partie I: E désigne un espace vectoriel sur R, de dimension n ($n \geq 2$)
On note i l'endomorphisme identité de E et $\theta$ l'endomorphisme nul de E.
Soit s un endomorphisme involutif de E, c'est à dire vérifiant s o s = i.

1 Justifier que s est bijectif et définir $s^{-1}$.
2 Déterminer les seules valeurs propres possibles de s.
On suppose dans la suite de cette partie que de plus $s \neq i$ et $s \neq -i$.
3a Montrer que $(s - i) \circ (s + i) = \theta$.
3b En déduire que -1 et 1 sont les valeurs propres de s.
4 Montrer que $E = \mathrm{Ker}(s - i) \oplus \mathrm{Ker}(s + i)$ ( On montrera dans un premier temps que si pour tout x de E on a : x = u+v, avec u élément de Ker ( s - i ) et v élément de Ker ( s + i ), alors nécessairement s(x) = u -v )
s est appelée la symétrie par rapport à Ker ( s - i ) parallèlement à Ker ( s + i ).

Partie II : Etude d'un exemple.

$M_n(R)$ désignant l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n, on note S l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(R)$ et A l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(R)$.
Si M est la matrice de $M_n(R)$ dont $m_{i,j}$ est l'élément de la i $^{\text{ème}}$ ligne et de la j $^{\text{ème}}$ colonne, avec i et j éléments de { 1,2,...,n } ,on rappelle que :
M est symétrique si et seulement si pour tout ( i,j ) : $m_{j,i} = m_{i,j}$.
M est antisymétrique si et seulement si pour tout ( i,j ) : $m_{j,i} = -m_{i,j}$.
Dans la suite, ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M.
1 Vérifier que S et A sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(R)$.
2 Montrer que : $M_n(R) = S \oplus A$.
3 On note T l'endomorphisme de $M_n(R)$ qui à chaque matrice associe sa transposée, montrer que T est la symétrie par rapport à S parallèlement à A.

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et $\lambda$ un réel strictement positif.

Partie I

1 j et k désignant des entiers naturels, $a_{k,j}$ des réels tels que, pour tout j la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$ soit convergente, montrer que : $\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} a_{k,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$.

2 Soient X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et S une variable aléatoire à valeurs dans { 0,1,...,n }. Pour tout k élément de $\mathbb{N}$, on définit l'espérance conditionnelle de S sachant que X=k par :

$$E(S / X=k) = \sum_{j=0}^{n} j\,P(S=j / X=k)$$

Montrer , en utilisant la première question , que : $E(S)=\sum_{k=0}^{+\infty} E(S/X=k).P(X=k)$ .

Partie II

Un ascenseur dessert n étages d'un immeuble .A chaque voyage le nombre de personnes qui montent dans cet ascenseur au rez de chaussée est une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda$ .
On émet les hypothèses suivantes :
-Aucun arrêt n'est dû à des personnes désirant monter dans l'ascenseur à un autre niveau que le rez de chaussée .
-Chaque personne choisit son étage d'arrivée au hasard et indépendamment des autres passagers .
( Ces choix se font dans l'ordre d'entrée des passagers dans l'ascenseur )
Enfin , pour tout entier naturel k , on appelle $S_k$ la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur lorsque celui-ci contient k passagers au départ .

1 Montrer que pour tout j appartenant à { 1,2,...,n } et pour tout entier naturel k :

$$P(S_{k+1}=j)=\frac{j}{n}P(S_k=j)+\frac{n-j+1}{n}P(S_k=j-1).$$

2 En déduire que $E(S_{k+1})=1+(1-\frac{1}{n})\,E(S_k)$ .

3 Après avoir justifié que $E(S_0)=0$ , déterminer $E(S_k)$ pour tout entier naturel k .

4 Montrer que si S désigne la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur à un voyage donné : $E(S)=n(1-e^{-\frac{\lambda}{n}})$

---

PROBLEME

p et n désignent deux entiers naturels non nuls .

Partie I

On pose : $u_p=\frac{1}{p}-\int_p^{p+1}\frac{dt}{t}$ , $v_n=\sum_{p=1}^{n}u_p$ .

1a Prouver que pour tout p supérieur ou égal à 1 : $0\le u_p\le\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}$

1b En déduire que la suite $(v_n)_{n\in N^*}$ est croissante puis prouver qu'elle converge et que sa limite $\gamma$ est élément de [ 0,1 ] . On note maintenant : $r_n=\sum_{p=n+1}^{+\infty}u_p$ .

2a Montrer que pour tout entier p supérieur ou égal à 1 : $u_p=\frac{1}{p}\int_0^1\frac{x}{p+x}dx$ .

2b En déduire que pour tout entier p supérieur ou égal à 2 : $\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1})\le u_p\le\frac{1}{2}(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p})$ .

2c A l'aide de cette dernière inégalité , établir que : $\frac{1}{2(n+1)}\le r_n\le\frac{1}{2n}$

3 Déterminer un entier n tel que $v_n$ soit une valeur approchée de $\gamma$ à $10^{-5}$ près .

Partie II

Dans cette partie , k est un entier supérieur ou égal à 1 .

On pose , pour tout réel t strictement positif : $f_0(t) = \frac{1}{t}$ et $f_k(t) = \frac{1}{t(t+1)\ldots(t+k)}$

1 Montrer que $f_{k-1}(t) - f_{k-1}(t+1) = k.f_k(t)$ .

2 En déduire que : $\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{n!}{k.(n+k)!}$

Partie III

On note $P_k$ le polynôme défini par :

$P_1(t) = t$ et , pour tout k supérieur ou égal à 2 , $P_k(t) = t(1-t)(2-t)\ldots(k-1-t)$ .

On pose d'autre part : $a_k = \int_0^1 P_k(t)dt$ .

1a Vérifier que, pour tout x positif : $\frac{1}{p+x} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1} \times \frac{1-x}{p+x}$

1b En déduire que $u_p = \frac{1}{2p(p+1)} + \frac{1}{p(p+1)} \int_0^1 \frac{P_2(x)}{p+x} dx$ .

2a Montrer que pour tout k entier supérieur ou égal à 1 , et pour tout réel x positif :

$$\frac{P_k(x)}{p+x} = \frac{P_k(x)}{p+k} + \frac{P_{k+1}(x)}{(p+k)(p+x)}$$

2b En déduire , par récurrence sur k , que:

$$u_p = \frac{a_1}{p(p+1)} + \frac{a_2}{p(p+1)(p+2)} + \cdots + \frac{a_k}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+k)} + \frac{1}{p(p+1)\ldots(p+k)} \int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x} dx$$

2c Montrer que pour tout entier p supérieur ou égal à 2 : $0 \le \int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x} dx \le \frac{a_{k+1}}{p-1}$

2d En déduire , en utilisant la partie II , que pour tout entier k supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$r_n = \frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{2(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{a_k}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} + r_{n,k}$$

avec $0 \le r_{n,k} \le \frac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}$

2e Construire une suite $(v_{n,k})_{n\in N}$ , de limite $\gamma$ telle que : $0 \le \gamma - v_{n,k} \le \frac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}$

3a Calculer $a_1, a_2, a_3, a_4$ .

3b Déterminer un entier $n_0$ tel que $v_{n_0,3}$ soit une valeur approchée de $\gamma$ à $10^{-5}$ près .

3c Ecrire , en Turbo-Pascal , un algorithme permettant le calcul de $v_{n_0}$ , puis de $v_{n_0,3}$ .

3d Donner la valeur de $\gamma$ à $10^{-5}$ près .