Exercice 1

Q1 Soit $x\in]0,1[$. $0<x^2<x<1$ et $t\mapsto \frac{1}{\ln t}$ est définie et continue sur $]0,1[$.

Par conséquent l'intégrale $\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$ existe.

Ceci suffit donc pour dire que F est "bien" définie sur $[0,1]$.

Q2 a) Soit $x\in]0,1[$, $\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}=\int_x^{x^2}\frac{1/t}{\ln t}dt=\left[\ln|\ln t|\right]_x^{x^2}=\ln|\ln x^2|-\ln|\ln x|$.

$\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}=\ln(2|\ln x|)-\ln|\ln x|=\ln\left(\frac{2|\ln x|}{|\ln x|}\right)=\ln 2$.

$\forall x\in]0,1[,\ \int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}=\ln 2$.

b) Soit $x\in]0,1[$. Remarquons que : $x^2<x$.

$\forall t\in [x^2,x]$, $t\ln t<0$

$\forall t\in [x^2,x]$, $\frac{x}{t\ln t}\le\frac{t}{t\ln t}=\frac{1}{\ln t}\le\frac{x^2}{t\ln t}$ (OK ?!)

donc $\int_{x^2}^{x}\frac{x}{t\ln t}dt\le\int_{x^2}^{x}\frac{dt}{\ln t}\le\int_{x^2}^{x}\frac{x^2}{t\ln t}dt$. En multipliant par -1 il vient : $x\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}dt\ \ge F(x)\ge x^2\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}$; ceci s'écrit encore :

$x^2\ln 2\le F(x)\le x\ln 2$

c) Par encadrement $\lim_{x\to 0^+}F(x)=0=F(0)$; F est continue à droite en 0.

et $\lim_{x\to 1^-}F(x)=\ln 2=F(1)$; F est continue à gauche en 1.

Soit G une primitive de $g : t\mapsto\frac{1}{t\ln t}dt$ sur $]0,1[$ (g est continue sur $]0,1[$).

$\forall x\in]0,1[$, $F(x)=G(x^2)-G(x)$. Posons $\forall x\in]0,1[$, $u(x)=x^2$. u est continue sur $]0,1[$ et prend ses valeurs dans $]0,1[$. De plus G est continue sur $]0,1[$. Par conséquent $F=G\circ u-G$ est continue sur $]0,1[$.

Finalement F est continue sur $[0,1]$.

Q3 a) $\forall x \in]0,1[$, $F(x) = G(x^2) - G(x) = (G\circ u - G)(x)$ $\quad (\forall x \in]0,1[,\ u(x) = x^2)$

- G est dérivable sur $]0,1[$
- u est dérivable sur $]0,1[$ et à valeurs dans $]0,1[$.

Par conséquent $F = G\circ u - G$ est dérivable sur $]0,1[$.

$\forall x \in]0,1[$, $F'(x) = u'(x)G'(u(x)) - G'(x) = 2x\dfrac{1}{\ln x^2} - \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{x-1}{\ln x}$.

$\forall x \in]0,1[$, $F'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$.

b) Que la question est mal posée. Pour parler de continuité de F' sur $[0,1]$ il faut que F' existe en 0 et en 1...

→ F est continue sur $[0,1]$

→ F est dérivable sur $]0,1[$.

→ $\forall x \in]0,1[$, $F'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$; F' est continue sur $]0,1[$.

→ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{\ln x} = 0$

Le théorème de la limite de la dérivée (... ou l'un de ses corollaires) permet de dire que F est C^1 sur $[0,1]$. Au passage : $F'(0) = 0$ et $F'(1) = 1$.

Q4 F' est continue sur $[0,1]$. F' est donc le prolongement par continuité de la fonction h définie sur $]0,1[$ par : $\forall x \in]0,1[$, $h(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$.

Par conséquent : $\displaystyle\int_0^1 h(t)\,dt$ existe et vaut $\displaystyle\int_0^1 F'(t)\,dt = F(1) - F(0) = \ln 2$.

$I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$ converge et vaut $\ln 2$.

<u>Exercice de contrôle</u>.. 1.. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > -1$

2.. Montrer que si $\alpha > -1$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,dt = \ln(\alpha + 1)$.

Exercice 2.

(Q1) a) $M^2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+db & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+ad & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2+ad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a(a+d) & c(a+d) \\ b(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} = (a+d)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} = -(ad-bc)I$

Donc $\underline{\underline{M^2 = (a+d)M - (ad-bc)I}}$

b) • Supposons $ad-bc \neq 0$

et c) Alors $I = \dfrac{1}{ad-bc}\left[(a+d)M - M^2\right] = \left(\dfrac{1}{ad-bc}\left[(a+d)I - M\right]\right)M$

Ceci suffit pour dire que M est inversible et que $\underline{\underline{M^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\left[(a+d)I - M\right] = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}}}$

• Réciproquement supposons M inversible.

Supposons $ad-bc=0$. Alors $M^2 = (a+d)M$; $M^{-1}M^2 = (a+d)M^{-1}M$; $M = (a+d)I$

$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix}$; $a = a+d$, $b=c=0$; $d = a+d$; $a=b=c=d=0$. $M=0$!!

Donc si M est inversible : $ad-bc \neq 0$.

Finalement M est inversible si et seulement si $ad-bc \neq 0$. (ie $\det M \neq 0$!)

(Q2) a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $(\alpha I)^2 = I \Leftrightarrow \alpha^2 I = I \Leftrightarrow \alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.

b) $M \neq I$ et $M \neq -I$

• Supposons M involutive.

$M^2 = I$; $(a+d)M - (ad-bc)I = I$; $(a+d)M = (ad-bc+1)I$

Supposons $a+d \neq 0$. $M = \alpha I$ avec $\alpha = \dfrac{ad-bc+1}{a+d}$.

$M^2 = I$ donc $(\alpha I)^2 = I$; $\alpha = 1$ ou -1 ; $M = I$ ou $-I$!

Finalement $a+d=0$ et donc $0 = (ad-bc+1)I = 0$

Donc $a+d=0$ et $ad-bc=-1$

• Supposons $a+d=0$ et $ad-bc=-1$

$M^2 = (a+d)M - (ad-bc)I = 0.M - (-1)I = I$; M est involutive.

Par conséquent M est involutive si et seulement si $a+d=0$ et $ad-bc=1$.

Q3 a) Posons $B = A - \alpha I = \begin{pmatrix} 5-\alpha & -4 \\ 2 & -1-\alpha \end{pmatrix}$

B est involutive si et seulement si : $5-\alpha-1-\alpha = 0$ & $(5-\alpha)(-1-\alpha)+8 = -1$

B est involutive si et seulement si : $\alpha = 2$ & $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$ ie $\alpha = 2$

Par conséquent si $\alpha = 2$: $A = \alpha I + B$ où B est une matrice involutive.

Notons que : $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = (\alpha I + B)^n = (2I+B)^n \underset{\substack{\uparrow \\ 2IB = B2I}}{=} \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} I^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} B^k$.

$B^2 = I$; $\forall k \in \mathbb{N}$, $B^k = \begin{cases} I \text{ si } k \text{ est pair} \\ B \text{ si } k \text{ est impair.} \end{cases}$

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $A^n = \sum_{0 \le 2k \le n} C_n^{2k} 2^{n-2k} I + \sum_{0 \le 2k+1 \le n} C_n^{2k+1} 2^{n-2k-1} B$

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.

$3^n = (2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} = \sum_{0 \le 2k \le n} C_n^{2k} 2^{n-2k} + \sum_{0 \le 2k+1 \le n} C_n^{2k+1} 2^{n-2k-1}$ (1)

$1 = 1^n = (2-1)^n = \sum C_n^k 2^{n-k} (-1)^k = \sum_{0 \le 2k \le n} C_n^{2k} 2^{n-2k} - \sum_{0 \le 2k+1 \le n} C_n^{2k+1} 2^{n-2k-1}$. (2)

$\frac{(1)+(2)}{2}$ donne : $\sum_{0 \le 2k \le n} C_n^{2k} 2^{n-2k} = \frac{1}{2}(3^n+1)$. $\frac{(1)-(2)}{2}$ donne : $\sum_{0 \le 2k+1 \le n} C_n^{2k+1} 2^{n-2k-1} = \frac{1}{2}(3^n-1)$.

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $A^n = \frac{3^n+1}{2} I + \frac{3^n-1}{2} B$

Recap : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \frac{3^n+1}{2} I + \frac{3^n-1}{2} B$

Q4 c) D'une pierre deux coups ! Posons $A' = \frac{3^{-1}+1}{2} I + \frac{3^{-1}-1}{2} B = \frac{2}{3} I - \frac{1}{3} B$

$AA' = (2I+B)(\frac{2}{3}I - \frac{1}{3}B) = \frac{4}{3} I + \frac{2}{3} B - \frac{2}{3} B - \frac{1}{3} B^2 = \frac{4}{3} I - \frac{1}{3} I = I$.

Donc A est inversible et $A^{-1} = A' = \frac{2}{3} I - \frac{1}{3} B = \frac{3^{-1}+1}{2} I + \frac{3^{-1}-1}{2} B$ ... cqfd

Exercice de contrôle.- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $A^n = \frac{3^n+1}{2} I + \frac{3^n-1}{2} B$

Exercice 3

Q1 a) $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1}\sin\dfrac{x}{2^{n+1}} = u_n\cos\dfrac{x}{2^{n+1}}\sin\dfrac{x}{2^{n+1}} \underset{\uparrow}{=} u_n\dfrac{1}{2}\sin\left(2\times\dfrac{x}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2}u_n\sin\dfrac{x}{2^n}$

$\cos a\sin a = \frac{1}{2}\sin 2a$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$; $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) $v_0 = u_0\sin x = \cos x\sin x$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0 = \dfrac{\cos x\sin x}{2^n}$; $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{v_n}{\sin\frac{x}{2^n}} = \dfrac{\cos x\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\cos x\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$.

c) $2^n\sin\dfrac{x}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n\times\dfrac{x}{2^n} = x$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\cos x\sin x}{x} = \frac{\sin 2x}{2x}$

Q2 a) Montrons par récurrence que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, le $k^{\text{ième}}$ passage a permis de calculer deux valeurs strictement positives (respectivement str. négatives) à a et b.

Notons qu'au départ a contient $1 = a_0$ et b contient $b_0 = \dfrac{1}{\cos x}$. $a_0>0$ et $b_0>0$

→ $k=1$. Le premier passage calcule $\frac{a+b}{2}$ et l'affecte à a ; notons que $\frac{a+b}{2} = \frac{a_0+b_0}{2} > 0$

La valeur affectée à a est strictement positive, notons la a_1.

Il est calculé ensuite $\sqrt{a_1 b}$, c'est à dire $\sqrt{a_1 b_0}$; cette valeur est strictement positive et est affectée à b. La propriété est vraie pour $k=1$.

→ Supposons la propriété vraie pour $k\in[\![1,n-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

Avant le $^{\text{ième}}$ passage a et b contiennent des valeurs strictement positives.

Le $k+1^{\text{ième}}$ passage calcule $\frac{a+b}{2}$, valeur strictement positive et l'affecte à a.

Il calcule ensuite $\sqrt{ab}$ (ce qui est possible car a et b contiennent des valeurs strictement positives), qui est une quantité strictement positive et l'affecte à b.

Ceci achève la récurrence.

L'algorithme calcule donc " n+1 " premiers termes de deux suites (a_n) et (b_n) dont les premiers termes sont respectivement $a_0 = 1$ et $b_0 = \frac{1}{\cos x}$.

b) $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1 + 1/\cos x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2\cos x}$

$x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

$b_1 = \sqrt{a_1 b_0} = \left(\frac{1+\cos x}{2\cos x} \times \frac{1}{\cos x}\right)^{1/2} = \left(\frac{1+\cos x}{2}\,\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{1/2} = \left(\frac{\cos^2 x/2}{\cos^2 x}\right)^{1/2} = \left|\frac{\cos x/2}{\cos x}\right| = \frac{\cos x/2}{\cos x}$

$b_1 = \frac{\cos(x/2)}{\cos(x)}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ et $b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}} = \sqrt{\frac{(a_{n-1}+b_{n-1})b_{n-1}}{2}}$

d) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_n \text{ est défini} \\ b_n \text{ ———} \\ a_n > 0 \\ b_n > 0 \end{cases}$

→ c'est clair pour $n = 0$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et montrons la pour n.

$\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ a un sens et est strictement positif ; a_n est défini et $a_n > 0$.

$\frac{(a_{n-1}+b_{n-1})b_{n-1}}{2}$ est strictement positif donc $b_n = \sqrt{\frac{(a_{n-1}+b_{n-1})b_{n-1}}{2}}$ est défini et strictement positif. Ceci achève la récurrence.

Q3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $b_n - a_n = \sqrt{a_n b_{n-1}} - a_n$

$b_n - a_n = \sqrt{a_n}\left(\sqrt{b_{n-1}} - \sqrt{a_n}\right) = \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{a_n}}(b_{n-1} - a_n) = \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{a_n}}\left(b_{n-1} - \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)$

$b_n - a_n = \frac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{a_n})}(b_{n-1} - a_{n-1})$.

b) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$.

→ $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. $0 < \cos x < 1$. $a_0 = 1 < \frac{1}{\cos x} = b_0$. $a_0 < b_0$.

→ Supposons $a_{n-1} < b_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$b_n - a_n = \underbrace{\frac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{a_{n-1}})}}_{>0} \underbrace{(b_{n-1} - a_{n-1})}_{>0}$$

; donc $b_n - a_n > 0$; $a_n < b_n$. Ceci achève la récurrence.

<u>$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n < b_n$.</u>

<u>c)</u> $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n - a_{n-1} = \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} - a_{n-1} = \dfrac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2} > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n-1} < a_n$. <u>$(a_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.</u>

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n - b_{n-1} = \sqrt{a_n b_{n-1}} - b_{n-1} = \sqrt{b_{n-1}}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_{n-1}}\right) = \frac{\sqrt{b_{n-1}}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_{n-1}}}(a_n - b_{n-1}).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n - b_{n-1} = \frac{\sqrt{b_{n-1}}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_{n-1}}}\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} - b_{n-1}\right) = \underbrace{\frac{\sqrt{b_{n-1}}}{2(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_{n-1}})}}_{>0} \underbrace{(a_{n-1} - b_{n-1})}_{<0}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n - b_{n-1} < 0$

<u>$(b_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante.</u>

<u>d)</u> $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n - a_n = \dfrac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{b_{n-1}}+\sqrt{a_n})}(b_{n-1} - a_{n-1})$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{b_{n-1}}+\sqrt{a_n})} \underset{b_{n-1} > b_n}{\leq} \frac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n})} \underset{\sqrt{b_n} > \sqrt{a_n}}{\leq} \frac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_n})} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad b_{n-1} - a_{n-1} > 0$$

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{4}(b_{n-1} - a_{n-1})$

A fortiori : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$

Une récurrence simple donne alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$

Donc <u>$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq b_n - a_n \leq \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{1}{\cos x} - 1\right)$.</u>

<u>e)</u> • Ce qui précède donne par encadrement $\lim_{n \to +\infty}(b_n - a_n) = 0$. Comme $(a_n)_{n\geq 0}$ est croissante et $(b_n)_{n\geq 0}$ décroissante : $((a_n),(b_n))$ est un couple de suites adjacentes.

Par conséquent les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ convergent et ont même limite ℓ

Q4 a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{u_n \cos x/2^n}{\cos^2 x}$ et $b_n = \dfrac{u_n}{\cos^2 x}$.

→ $\dfrac{u_0 \cos(x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x \times \cos x}{\cos^2 x} = 1 = a_0$. $\dfrac{u_0}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos x} = b_0$

La propriété est vraie pour $n=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ et montrons la pour n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{u_{n-1}\cos x/2^{n-1}}{\cos^2 x} + \frac{u_{n-1}}{\cos^2 x}\right] = \frac{u_{n-1}}{\cos^2 x}\ \frac{1+\cos(x/2^{n-1})}{2} = \frac{u_{n-1}}{\cos^2 x}\cos^2\frac{x}{2^n}$$

$$a_n = \frac{u_{n-1}\cos\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}}{\cos^2 x} = \frac{u_n \cos\frac{x}{2^n}}{\cos^2 x}.$$

$$b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}} = \sqrt{\frac{u_n \cos x/2^n}{\cos^2 x} \times \frac{u_{n-1}}{\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{u_n\ u_{n-1}\cos x/2^n}{\cos^4 x}} = \sqrt{\frac{u_n^2}{\cos^4 x}} = \left|\frac{u_n}{\cos^2 x}\right| = \frac{u_n}{\cos^2 x}$$

Ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{u_n \cos x/2^n}{\cos^2 x}$ et $b_n = \dfrac{u_n}{\cos^2 x}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\sin 2x}{2x} = \dfrac{2\cos x \sin x}{2x} = \dfrac{\cos x \sin x}{x}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(x/2^n) = 1$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{\cos x \sin x}{x\cos^2 x} = \dfrac{\tan x}{x}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{\tan x}{x}$.

PROBLÈME PARTIE I

Q1 a) 1ère colonne de M.

$p(X_{n+1}=0/X_n=0)=0$
$p(X_{n+1}=1/X_n=0)=1$ } le point 0 est réfléchissant
$p(X_{n+1}=2/X_n=0)=0$
$p(X_{n+1}=3/X_n=0)=0$

2ème colonne de M | 3ème colonne de M |
---|---|---
$p(X_{n+1}=0/X_n=1)=1/2$ | $p(X_{n+1}=0/X_n=2)=0$ | $p(X_{n+1}=0/X_n=3)=0$
$p(X_{n+1}=1/X_n=1)=0$ | $p(X_{n+1}=1/X_n=2)=1/2$ | $p(X_{n+1}=1/X_n=3)=0$
$p(X_{n+1}=2/X_n=1)=1/2$ | $p(X_{n+1}=2/X_n=2)=0$ | $p(X_{n+1}=2/X_n=3)=0$
$p(X_{n+1}=3/X_n=1)=0$ | $p(X_{n+1}=3/X_n=2)=1/2$ | $p(X_{n+1}=3/X_n=3)=1$

Par conséquent $M=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$.

$(\{X_n=0\},\{X_n=1\},\{X_n=2\},\{X_n=3\})$ est un système complet d'événements par conséquent :

$\forall i\in[\![0,3]\!],\ p(X_{n+1}=i)=\sum_{j=0}^{3} p(X_{n+1}=i/X_n=j)\,p(X_n=j)$ ce qui signifie exactement que : $\underline{U_{n+1}=MU_n}$.

Q2 a) Soit $X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

- $MX=0 \iff \begin{cases} \frac{1}{2}y=0 \\ x+\frac{1}{2}z=0 \\ 1/2\, y=0 \\ 1/2\, z+t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ z=-2x \\ t=x \end{cases}$. Par conséquent $\{X\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})\mid MX=0\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}\right)$

  Donc 0 est valeur propre de M et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}\right)$

- $MX=X \iff \begin{cases} \frac{1}{2}y=x \\ x+\frac{1}{2}z=y \\ 1/2\, y=z \\ 1/2\, z+t=t \end{cases} \iff \begin{cases} z=0 \\ y=0 \\ x=0 \end{cases}$. Par conséquent $\{X\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})\mid MX=X\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$

  Donc 1 est valeur propre de M et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$.

• $\varepsilon \in \{-1,1\}$.

$$MX = \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2}X \iff \begin{cases} \frac{1}{2}y = \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2}x \\ x+\frac{1}{2}z = \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{1}{2}y = \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2}z \\ \frac{1}{2}z + t = \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \iff \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{3}x \\ y = \varepsilon\sqrt{3}z \\ x+\frac{1}{2}z = \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2}\varepsilon\sqrt{3}z \\ t = \frac{-1}{2-\varepsilon\sqrt{3}}z = \frac{-(2+\varepsilon\sqrt{3})}{4-\varepsilon^2\times 3}z = -(2+\varepsilon\sqrt{3})z \end{cases} \iff \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{3}x \\ z = x \\ x+\frac{1}{2}z = \frac{3}{2}z \\ t = -(2+\varepsilon\sqrt{3})z \end{cases}$$

$$MX = \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2}X \iff \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{3}x \\ z = x \\ t = -(2+\varepsilon\sqrt{3})x \end{cases} \quad \text{car} \quad x+\frac{1}{2}z = \frac{3}{2}z \iff x = z.$$

Finalement $\quad \{X \in M_{4,1}(\mathbb{R}) \mid MX = \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2}X\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon\sqrt{3} \\ 1 \\ -(2+\varepsilon\sqrt{3}) \end{bmatrix}\right)$.

Donc $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est valeur propre de M et le sous-espace propre associé est : $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ -(2+\sqrt{3}) \end{bmatrix}\right)$

et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ est valeur propre de M et le sous-espace propre associé est : $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \\ \sqrt{3}-2 \end{bmatrix}\right)$.

b) M a quatre valeurs propres distinctes $0, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $M \in M_4(\mathbb{R})$; par conséquent <u>M est diagonalisable</u>.

$\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ -(2+\sqrt{3}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \\ \sqrt{3}-2 \end{bmatrix}\right)$ est une famille de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de quatre vecteurs propres de M associés à des valeurs propres distinctes ;

<u>$\mathcal{B}'$ est donc une base de $M_{4,1}(\mathbb{R})$.</u>

Soit $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2-\sqrt{3} & \sqrt{3}-2 \end{bmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}'$. P est inversible comme matrice de passage. De plus :

$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ car les quatre éléments de $\mathcal{B}'$ sont des vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres $0, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Par conséquent $\quad M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2-\sqrt{3} & \sqrt{3}-2 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$.

c) Vérifions paresseusement la validité de l'égalité proposée.

$$P \times \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2-\sqrt{3} & \sqrt{3}-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = I_4$$

Par conséquent $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}$!

d) et e) $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \Pi U_n$.

Une récurrence simple donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \Pi^n U_0$

Or $U_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n n'est autre que la première colonne de la matrice Π^n.

De plus $\forall n \in \mathbb{N},\ \Pi^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$ (... encore une récurrence simple).

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est la première colonne de $PD^nP^{-1}U_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $D^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-a)^n \end{bmatrix} \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2a^n & \sqrt{3}a^n & a^n & 0 \\ 2(-a)^n & -\sqrt{3}(-a)^n & (-a)^n & 0 \end{bmatrix}$ avec $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$PD^nP^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2-\sqrt{3} & \sqrt{3}-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2a^n & \sqrt{3}a^n & a^n & 0 \\ 2(-a)^n & -\sqrt{3}(-a)^n & (-a)^n & 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent la première colonne de PD^nP^{-1} est : $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2a^n + 2(-a)^n \\ 2\sqrt{3}a^n - 2\sqrt{3}(-a)^n \\ 2a^n + 2(-a)^n \\ 6 + 2a^n(-2-\sqrt{3}) + 2(\sqrt{3}-2)(-a)^n \end{bmatrix}$

La première colonne de Π^n est : $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} (\sqrt{3}/2)^n + (-\sqrt{3}/2)^n \\ \sqrt{3}(\sqrt{3}/2)^n - \sqrt{3}(-\sqrt{3}/2)^n \\ (\sqrt{3}/2)^n + (-\sqrt{3}/2)^n \\ 3 - (2+\sqrt{3})(\sqrt{3}/2)^n + (\sqrt{3}-2)(-\sqrt{3}/2)^n \end{bmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n=0$ la première colonne de Π^n est $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ car $\Pi^0 = I$.

Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \begin{cases} p(X_n=0) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right) \\ p(X_n=1) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right) \\ p(X_n=2) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right) \\ p(X_n=3) = \frac{1}{3}\left(3 - (1+\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + (\sqrt{3}-1)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right) \end{cases}$$

(puisque U_n est la première colonne de Π^n).

PROBLÈME PARTIE II

Q1 a) Soit $j \in [\![1, +\infty[\![$.

→ Si $\{Y=j\}$ est réalisé : $\forall k \in [\![0, j-1]\!]$, le mobile n'est pas en C à l'instant k et le point mobile est en C à l'instant j.

donc si $\{Y=j\}$ est réalisé : $\left[\bigcap_{k=0}^{j-1} \{X_k \neq 3\}\right] \cap \{X_j = 3\}$ est réalisé

→ Réciproquement supposons $\left[\bigcap_{k=0}^{j-1} \{X_k \neq 3\}\right] \cap \{X_j=3\}$ est réalisé alors le mobile se trouve pour la première fois à l'instant j en C donc $\{Y=j\}$ est réalisé.

Par conséquent : $\{Y=j\} = \left[\bigcap_{k=0}^{j-1} \{X_k \neq 3\}\right] \cap \{X_j=3\}$.

b) → Supposons $\{X_{j-1} \neq 3\} \cap \{X_j=3\}$ réalisé.

Le mobile est en C à l'instant j mais n'y est pas à l'instant $j-1$; par conséquent il est en B à l'instant $j-1$ et en C à l'instant j ; $\{X_{j-1}=2\} \cap \{X_j=3\}$ est réalisé.

→ Clairement si $\{X_{j-1}=2\} \cap \{X_j=3\}$ est réalisé alors $\{X_{j-1}\neq 3\} \cap \{X_j=3\}$ l'est aussi

Finalement : $\{X_{j-1} \neq 3\} \cap \{X_j=3\} = \{X_{j-1}=2\} \cap \{X_j=3\}$.

c) Si $\{X_{j-1}=2\}$ est réalisé le mobile ne s'est jamais trouvé en C aux instants $0, 1, 2, \dots, j-2$ donc $\bigcap_{k=0}^{j-2} \{X_k \neq 3\}$ est réalisé.

$\{X_{j-1}=2\} \subset \bigcap_{k=0}^{j-2} \{X_k \neq 3\}$.

$$\{Y=j\} = \left[\bigcap_{k=0}^{j-1} \{X_k \neq 3\}\right] \cap \{X_j = 3\}$$

$$\{Y=j\} = \left[\bigcap_{k=0}^{j-2} \{X_k \neq 3\}\right] \cap \{X_{j-1} \neq 3\} \cap \{X_j=3\} = \left[\bigcap_{k=0}^{j-2} \{X_k \neq 3\}\right] \cap \{X_{j-1}=2\} \cap \{X_j=3\}$$

$\underline{\underline{\{Y=j\} = \{X_{j-1}=2\} \cap \{X_j=3\}}}$ car $\{X_{j-1}=2\} \subset \left[\bigcap_{k=0}^{j-2} \{X_k \neq 3\}\right]$

Remarque... Ce résultat n'est-il pas une évidence ?!

$\forall j \in [\![3,+\infty[\![$, $p(Y=j) = p(X_{j-1}=2 \cap X_j=3) = p(X_j=3 / X_{j-1}=2)\, p(X_{j-1}=2)$.

$\forall j \in [\![3,+\infty[\![$, $p(Y=j) = \frac{1}{2} p(X_{j-1}=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1}\right]$

$\underline{\underline{\forall j \in [\![3,+\infty[\![, \quad p(Y=j) = \frac{1}{6}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1}\right]}}$.

d) Les séries de terme général $j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1}$ et $j\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1}$ sont convergentes car $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|<1$ et $\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|<1$!

Par conséquent la série de terme général $j\,p(Y=j)$ converge comme combinaison linéaire de séries convergentes.

$\forall j \in [\![3,+\infty[\![$, $j\,p(Y=j) \geq 0$; la série de terme général $j\,p(Y=j)$ est donc absolument convergente : $\underline{\underline{Y \text{ possède une espérance}}}$.

$$E(Y) = \sum_{j=3}^{+\infty} \frac{j}{6}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1}\right] = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{6}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1}\right] - \frac{1}{6}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{0} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{0}\right] - \frac{2}{6}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1}\right].$$

$$E(Y) = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{+\infty} j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} + \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{+\infty} j\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} - \frac{1}{6}\times 2 - \frac{2}{6}\times 0$$

$$E(Y) = \frac{1}{6}\,\frac{1}{(1-\sqrt{3}/2)^2} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{(1+\sqrt{3}/2)^2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left[\frac{(1+\sqrt{3}/2)^2 + (1-\sqrt{3}/2)^2}{(1-\sqrt{3}/2)^2(1+\sqrt{3}/2)^2}\right] - \frac{1}{3}$$

$$E(Y) = \frac{1}{6}\left[\frac{1+3/4+\sqrt{3}+1+3/4-\sqrt{3}}{(1-3/4)^2}\right] - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\times 16 \times \frac{7}{2} - \frac{1}{3} = \frac{28}{3} - \frac{1}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

$\underline{\underline{E(Y) = 9.}}$

(Q2) a) $\{Z=j\} \subset \{X_{j-1}=1\} \cap \{X_j=2\}$ mais l'inclusion inverse est en général fausse ; si $\{X_{j-1}=1\} \cap \{X_j=2\}$ le mobile est en j à l'instant B mais rien ne prouve qu'il y arrive pour la première fois à cet instant.

b) Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

$\{Z=2j\} = \{X_0=0\} \cap \{X_1=1\} \cap \{X_2=0\} \cap \{X_3=1\} \cap \cdots \cap \{X_{2j-2}=0\} \cap \{X_{2j-1}=1\} \cap \{X_{2j}=2\}$

$p(Z=2j) = p(X_0=0)\, p(X_1=1/X_0=0)\, p(X_2=0/\{X_0=0\}\cap\{X_1=1\})\, p(X_3=1/\{X_0=0\}\cap\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\}) \times \cdots \times$

$p(X_{2j-2}=0/\{X_0=0\}\cap\{X_1=1\}\cap\cdots\cap\{X_{2j-3}=1\})\, p(X_{2j-1}=1/\{X_0=0\}\cap\{X_1=1\}\cap\cdots\cap\{X_{2j-2}=0\}) \times$

$p(X_{2j}=2/\{X_0=0\}\cap\{X_1=1\}\cap\cdots\cap\{X_{2j-1}=1\})$

Notons que $\to p(X_{2k}=0/\{X_0=0\}\cap\{X_1=1\}\cap\cdots\cap\{X_{2k-1}=1\}) = \frac{1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$\to p(X_{2k+1}=1/\{X_0=0\}\cap\{X_1=1\}\cap\cdots\cap\{X_{2k}=0\}) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

$\to p(X_{2j}=2/\{X_0=0\}\cap\{X_1=1\}\cap\cdots\cap\{X_{2j-1}=1\}) = \frac{1}{2}$

Par conséquent : $p(Z=2j) = \underbrace{1\times\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}\times\cdots\times 1\times\frac{1}{2}}_{j \text{ fois}} = \left(\frac{1}{2}\right)^j$

$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ p(Z=2j) = \left(\frac{1}{2}\right)^j$.

c) Soit $j \in \mathbb{N}$. $\underset{\{Z=2j+1\}\subset\{X_{2j+1}=2\}}{p(Z=2j+1) \leq p(X_{2j+1}=2)} = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2j+1} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2j+1}\right] = 0$

Donc $\forall j \in \mathbb{N},\ p(Z=2j+1)=0$.

d) $\forall j \in \mathbb{N}^*,\quad 2j\, p(Z=2j) = 2j\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2j}$

$\forall j \in \mathbb{N}^*,\quad (2j+1)\,p(Z=2j+1) = 0 \leq (2j+1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2j+1}$!

Dans tous les cas : $\forall j \in [\![2,+\infty[\![,\ 0 \leq j\,p(Z=j) \leq j\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^j$

La série de terme général $j(1/\sqrt{2})^j$ étant convergente les règles de comparaison des séries à termes positifs assurent la convergence de la série de terme général $j\,p(Z=j)$ donc sa absolue convergence ($j\,p(Z=j) \geq 0$). $E(Z)$ existe.

$E(Z) = \sum_{j=1}^{+\infty} 2j\, p(Z=2j) = 2\sum_{j=1}^{+\infty} j\left(\frac{1}{2}\right)^j = \sum_{j=1}^{+\infty} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}$. $E(Z)=4$.