## EXERCICE 1

**Q1** Soit $f \in E$ ; $\Delta(f)$ est la primitive de $f$ sur IR qui prend la valeur 0 en 0 donc $\Delta(f)$ est dérivable sur IR, donc $\Delta(f)$ est continue sur IR ; par conséquent $\Delta(f) \in E$.

<u>$\Delta$ est une application de E dans E.</u>

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f_1,f_2) \in E^2, \forall x \in \mathbb{R}, \Delta(\lambda f_1+f_2)(x) = \int_0^x (\lambda f_1+f_2)(t)\,dt = \lambda \int_0^x f_1(t)\,dt + \int_0^x f_2(t)\,dt = (\lambda \Delta(f_1) + \Delta(f_2))(x)$.

Donc <u>$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f_1,f_2) \in E^2, \Delta(\lambda f_1+f_2) = \lambda \Delta(f_1) + \Delta(f_2)$</u>. $\Delta$ est linéaire.

<u>$\Delta$ est un endomorphisme de E.</u>

**Q2** a) Voir plus haut !

b) Soit $\varphi : x \mapsto |x|$. $\varphi$ est continue sur IR mais $\varphi$ n'est pas dérivable en 0 donc $\varphi \in E$ et $\varphi \notin \mathrm{Im}\,\Delta$. Par conséquent $\mathrm{Im}\,\Delta$ est strictement contenu(e) dans E. <u>$\Delta$ n'est pas surjective.</u> <u>Remarque</u> : $\mathrm{Im}\,\Delta \subset \{f \in E \mid f(0)=0\}$ confirme la non surjectivité !

**Q3** Montrons que : $\mathrm{Ker}\,\Delta = \{0_E\}$. Soit $f \in \mathrm{Ker}\,\Delta$. $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t)\,dt = 0$

En dérivant il vient : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ donc $f = 0_E$

Par conséquent $\mathrm{Ker}\,\Delta = \{0_E\}$ et <u>$\Delta$ est injective.</u>

**Q4** a) $\Delta(f) = \lambda f$. Donc $f = \frac{1}{\lambda}\Delta(f)$ car $\lambda$ n'est pas nul ; par conséquent $f$ est dérivable sur IR puisque $\Delta(f)$ l'est.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\lambda}(\Delta(f))'(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x)e^{-x/\lambda}$. $h$ est donc dérivable sur IR comme produit de deux fonctions dérivables sur IR et $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = (f'(x) - \frac{1}{\lambda} f(x))e^{-x/\lambda} = 0$. $h$ est nulle sur IR donc <u>$h$ est constante sur IR.</u>

b) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = a$. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a e^{x/\lambda}$. Or $\Delta(f) = \lambda f$ donc $\Delta(f)(0) = \lambda f(0)$

Par conséquent : $0 = \lambda f(0) = \lambda a \times 1$. $\lambda a = 0$. $a = 0$. $f = 0_E$ !! ce qui induit une légère contradiction ! Il n'est pas franchement utile de calculer $\Delta(f)$ ; de toute manière <u>$\Delta(f) = \lambda f = 0_E$!</u> Notons donc que <u>si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda$ ne peut être valeur propre de $\Delta$.</u>

Q5 d'après Q3, 0 n'est pas valeur propre de $\Delta$ ; de plus Q4 a montré que si $\lambda$ est un réel non nul alors $\lambda$ n'est pas valeur propre de $\Delta$

donc $\Delta$ n'a pas de valeur propre ce qui n'est pas un scoop.

Q6 a) Soit $f \in E$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

→ $F_0 = \Delta(f)$. $F_0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F_0' = f$. Comme $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, $F_0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et montrons la pour $n$.

$F_n = \Delta(F_{n-1})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F_n' = F_{n-1}$. L'hypothèse de récurrence montre alors que $F_n'$ est de classe $\mathcal{C}^{(n-1)+1}$ sur $\mathbb{R}$. $F_n'$ étant de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ alors $F_n$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ et la récurrence s'achève.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $f \in E$ et soit $n \in \mathbb{N}$. $F_n$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Nous avons vu que $F_n' = F_{n-1}$.

Une récurrence simple donne $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $F_n^{(k)} = F_{n-k}$.

En particulier $F_n^{(n)} = F_0 = \Delta(f)$, donc $F_n^{(n+1)} = (\Delta(f))' = f$.

Notons encore que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $F_n^{(k)}(0) = F_{n-k}(0) = \begin{cases} \Delta(f)(0) = \underline{0} & \text{si } n-k = 0 \\ \Delta(F_{n-k-1})(0) = \underline{0} & \text{si } n-k \geqslant 1 \end{cases}$

Il est grand temps d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à $F_n$ ... qui est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_n^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F_n^{(n+1)}(t)\, dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\, dt.$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\, dt$.

Remarque. - Nous avons en fait prouvé que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall f \in E,\quad \Delta^{n+1}(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\, dt \text{ pour tout réel } x.$$

ce résultat peut se démontrer par récurrence sur $n$ à condition de ne pas oublier le "$\forall f \in E$" dans la propriété de récurrence (... l'hypothèse de récurrence opère sur $\Delta f$ ...)

## EXERCICE 2 

Remarque.. $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $[x,2x]\subset\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}_-^*$, $[2x,x]\subset\mathbb{R}_-^*$ ... donc $f$ est bien définie... sur $\mathbb{R}$ !

**Q1** a) $g$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues...

$\sin t = t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)$ ; $\sin t - t = -\frac{t^3}{6}+o(t^3)$ ; $\sin t - t \underset{0}{\sim} -\frac{t^3}{6}$ ; $\frac{\sin t - t}{t^2}\underset{0}{\sim}-\frac{t}{6}$

Donc $\lim_{t\mapsto 0}\frac{\sin t - t}{t^2}=0=g(0)$ ; $g$ est continue en 0.

Finalement $g$ est continue sur $\mathbb{R}$. Remarque.. Un dl 2 suffisait largement !

b) Soit $G$ une primitive de $g$ sur $\mathbb{R}$. $G$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0. Par conséquent : $\lim_{x\mapsto 0}(G(2x)-G(x))=G(0)-G(0)=0$.

Et donc $\lim_{x\mapsto 0}\int_x^{2x} g(t)\,dt=0$.

c) $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t^2}dt=\int_x^{2x}g(t)\,dt+\int_x^{2x}\frac{t}{t^2}dt=\int_x^{2x}g(t)\,dt+[\ln|t|]_x^{2x}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t^2}dt=\int_x^{2x}g(t)\,dt+\ln|2x|-\ln|x|=\int_x^{2x}g(t)\,dt+\ln 2$

Donc $\lim_{x\mapsto 0}\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t^2}dt=0+\ln 2=f(0)$ ; $f$ est continue en 0.

**Q2** Soit $x\in\mathbb{R}^*$. $f(-x)=\int_{-x}^{-2x}\frac{\sin t}{t^2}dt \underset{u=-t}{=} \int_x^{2x}\frac{\sin(-u)}{u^2}(-du)=\int_x^{2x}\frac{\sin u}{u^2}du=f(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f(-x)=f(x)$ ; cette égalité vaut encore pour $x=0$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=f(x)$. $f$ est paire sur $\mathbb{R}$.

**Q3** a) $\varphi : t\mapsto\frac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Soit $\phi$ une primitive de $\varphi$ sur $\mathbb{R}^*$.

$\phi$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc $x\mapsto\phi(2x)-\phi(x)$ aussi (composition banale)

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f(x)=\int_x^{2x}\varphi(t)\,dt=\phi(2x)-\phi(x)$. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

b) $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f'(x)=\underline{2}\,\phi'(2x)-\phi'(x)=2\varphi(2x)-\varphi(x)=\frac{2\sin 2x}{4x^2}-\frac{\sin x}{x^2}=\frac{\sin 2x-2\sin x}{2x^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = -\dfrac{2\sin x(1-\cos x)}{2x^2}$.

c) $f'(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{2\times x \times x^2/2}{2x^2} = -\dfrac{x}{2}$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = 0$.

$f$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = 0$. Le théorème de la limite de la dérivée indique alors que :

1°.- $f$ est dérivable en 0 2°.- $f'(0)=0$ 3° $f'$ est continue en 0.

Remarque.- $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

Le signe de $f'$ sur $]0,+\infty[$ est celui de la fonction $-\sin$ ... et même sur $[0,+\infty[$ !

donc $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [k\times 2\pi,\ k\times 2\pi+\pi],\ f'(x) \leq 0$.

$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [k\times 2\pi+\pi,\ (k+1)\times 2\pi],\ f'(x) \geq 0$.

Q4 a) Soit $x \in \mathbb{R}^*_+$. $\forall t \in [x,2x],\ \left|\dfrac{\sin t}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$ et $\exists t_0 \in [x,2x],\ \left|\dfrac{\sin t_0}{t_0^2}\right| < \dfrac{1}{t_0^2}$

Par conséquent : $\displaystyle\int_x^{2x} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| dt \underset{x<2x}{<} \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$.

ce qui donne encore : $\displaystyle |f(x)| = \left|\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,dt\right| \leq \int_x^{2x} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| dt < \frac{1}{2x}$. $\forall x \in \mathbb{R}^*_+,\ |f(x)| < \dfrac{1}{2x}$.

Remarque.- $\forall x \in \mathbb{R}^*_+,\ |f(x)| < \dfrac{1}{2|x|}$ et par parité : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |f(x)| < \dfrac{1}{2|x|}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}^*_+,\ |f(x)| < \dfrac{1}{2x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Q5 a) $\forall t \in [\frac{\pi}{2}, 2\times\frac{\pi}{2}],\ \dfrac{\sin t}{t^2} \geq 0$ et $\forall t \in [\frac{\pi}{2}, 2\times\frac{\pi}{2}[,\ \dfrac{\sin t}{t^2} > 0$ donc $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\times\pi/2} \frac{\sin t}{t^2}\,dt > 0$.

$\forall t \in [\pi, 2\times\pi],\ \dfrac{\sin t}{t^2} \leq 0$ et $\forall t \in ]\pi, 2\pi[,\ \dfrac{\sin t}{t^2} < 0$ donc $\displaystyle\int_{\pi}^{2\times\pi} \frac{\sin t}{t^2}\,dt < 0$.

Finalement : $f(\frac{\pi}{2}) > 0$ et $f(\pi) < 0$.

**b)** $f(2\pi)=\int_{2\pi}^{4\pi}\frac{\sin t}{t^2}\,dt=\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin t}{t^2}\,dt+\int_{3\pi}^{4\pi}\frac{\sin t}{t^2}\,dt\underset{u=t-\pi}{=}\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin t}{t^2}\,dt+\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin(u+\pi)}{(u+\pi)^2}\,du$

donc $f(2\pi)=\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin t}{t^2}\,dt-\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin(u)}{(u+\pi)^2}\,du=\int_{2\pi}^{3\pi}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(t+\pi)^2}\right)\sin t\,dt.$

$\forall t\in[2\pi,3\pi],\ \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(t+\pi)^2}\right)>0$ ; $\forall t\in[2\pi,3\pi]$, $\sin t\geq 0$ et $\forall t\in]2\pi,3\pi[$, $\sin t>0$

donc $\underline{\underline{f(2\pi)>0}}$.

## EXERCICE 3

comme dirait mon beauf c'est de la daube.

(Q1) $f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et $g$ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Donc $g\circ f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ (la composée de deux applications linéaires est une application linéaire). $\underline{\underline{g\circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}}$.

<u>Remarque</u>.. Notons que $f\circ g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

(Q2) <u>a)</u> Soit $y \in \mathrm{Im}(g\circ f)$. $\exists x \in \mathbb{R}^3$, $g(f(x)) = y$. Posons $z = f(x)$ ; $y = g(z)$ donc $y \in \mathrm{Im}\, g$.

Par conséquent : $\underline{\mathrm{Im}(g\circ f) \subset \mathrm{Im}\, g}$.

<u>Ou encore</u> : $f(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^2$ donc $\mathrm{Im}(g\circ f) = g(f(\mathbb{R}^3)) \subset g(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Im}\, g$.

<u>b)</u> $\dim \mathrm{Im}\, g + \dim \mathrm{Ker}\, g = \dim \mathbb{R}^2$ car $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

Par conséquent $\dim \mathrm{Im}\, g \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2$. $\underline{\underline{\dim \mathrm{Im}\, g \leq 2}}$.

<u>c)</u> $\mathrm{Im}(g\circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$ donc $\dim(\mathrm{Im}(g\circ f)) \leq \dim \mathrm{Im}\, g \leq 2$. $\underline{\underline{\dim(\mathrm{Im}(g\circ f)) \leq 2}}$.

<u>d)</u> Comme $g\circ f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et que $\dim \mathbb{R}^3 < +\infty$ (!), $g\circ f$ injective équivaut à $g\circ f$ surjective. Donc $g\circ f$ non injective équivaut à $g\circ f$ non surjective.

Si $g\circ f$ est surjective : $\mathrm{Im}(g\circ f) = \mathbb{R}^3$ ; ceci est impossible car $\dim(\mathrm{Im}(g\circ f)) \leq 2$.

Par conséquent : $\underline{\underline{g\circ f \text{ n'est ni surjective ni injective}}}$.

(Q3) $g\circ f$ n'étant pas injective 0 est valeur propre de $g\circ f$. $\underline{\underline{0 \text{ est valeur propre de } BA}}$.

(Q4) <u>a)</u> $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une réduite de Gauss de $AB$ donc $AB$ est inversible.

Supposons que $BX = 0$. Alors $ABX = 0$ donc $X = 0$ !

Par conséquent $\underline{\underline{BX \neq 0}}$. <u>Remarque</u>.. On pouvait aussi utiliser l'égalité $ABX = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$...

<u>b)</u> Soit $\lambda$ une valeur propre de $AB$. $\exists X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ et $ABX = \lambda X$.

$BABX = \lambda BX$ ; $BA(BX) = \lambda(BX)$ et $BX$ n'est pas nul d'après <u>a)</u>.

Donc $\lambda$ est valeur propre de $BA$.

<u>c)</u> $AB - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ ; $\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}}$ ; $\underset{L_2 \leftarrow \lambda L_1 + L_2}{\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}}$. Les deux valeurs propres de $AB$ sont donc $-1$ et $1$.

Donc $-1$, $1$ et $0$ sont <u>des</u> valeurs propres de $BA$ (Q3+Q4<u>b</u>). Or $BA$ est une matrice d'ordre 3 donc $-1, 1, 0$ sont LES valeurs propres de $BA$ qui est alors diagonalisable !

## PROBLÈME

**PARTIE I** Notons que parler de la variable aléatoire $T = Z/A$ n'a aucun sens. A la rigueur on peut parler de la loi de $Z$ sachant que $A$ est réalisé. Mais ... $Z/A$ possède une espérance si et seulement si la série de terme général $k\,p([Z=k]/A)$ est absolument convergente.

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad |k\,p([Z=k]/A)| = k\,p([Z=k]/A) = \frac{1}{p(A)}\,k\,p([Z=k]\cap A) \leq \frac{1}{p(A)}\,k\,p([Z=k])$$

$Z$ ayant une espérance la série de terme général $k\,p([Z=k])$ est convergente ; celle de terme général $\frac{1}{p(A)}\,k\,p([Z=k])$ aussi. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $|k\,p([Z=k]/A)|$ converge.

$E(Z/A)$ existe donc.

Ceci étant vrai pour tout événement $A$ de $\Omega$ de probabilité non nulle on peut alors affirmer que $E(Z/\bar{A})$ existe également !

<u>$E(Z/A)$ et $E(Z/\bar{A})$ existent pour tout élément $A$ de $\Omega$ de probabilité distincte de 0 et 1</u>

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,p(Z=k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(k\,p([Z=k]/A)\,p(A) + k\,p([Z=k]/\bar{A})\,p(\bar{A})\Big)$$

$$E(Z) = p(A)\sum_{k=0}^{+\infty} k\,p([Z=k]/A) + p(\bar{A})\sum_{k=0}^{+\infty} k\,p([Z=k]/\bar{A})$$ car les deux séries convergent.

Donc <u>$E(Z) = p(A)\,E(Z/A) + p(\bar{A})\,E(Z/\bar{A})$.</u>

**PARTIE II** (Q1) Ici on est assez mal ! Que dire de $X_0$ ?

1er cas.. on suppose que, dans la mesure où l'urne U est vide au départ, l'état $E_0$ est atteint au 0 tirage mais alors on ne peut plus dire que $X_0$ prend la valeur 0 si l'état $E_0$ n'est jamais atteint.

2e cas.. on ne compte pas l'état initial alors $X_0$ n'est plus une variable aléatoire.

Le mieux est donc de dire que par convention $X_0$ est la variable certaine nulle.

Notons que le premier tirage met l'urne U dans l'état $E_1$ et ceci pour la première fois. Donc $X_1$ est la variable certaine égale à 1.

**Q2** a) $N_j$ est le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne passe de l'état $E_j$, atteint pour la première fois, à l'état $E_{j+1}$ atteint pour la première fois.

b) Soit $j \in [\![0, 2n-1]\!]$. $X_{j+1}$ et $X_j$ ayant une espérance $N_j = X_{j+1} - X_j$ en possède une aussi.

Notons que : $\forall j \in [\![0, 2n-1]\!]$, $E(N_j) = E(X_{j+1}) - E(X_j)$, $\underline{\forall j \in [\![0, 2n-1]\!],\ \mu_j = m_{j+1} - m_j}$.

$j \in [\![1, 2n-1]\!]$

**Q3** a) Pour passer de l'état $E_j$ à l'état $E_{j+1}$ en un seul tirage il est nécessaire de tirer un numéro correspondant à une boule de V qui contient $2n-j$ boules.

Par conséquent $\underline{\underline{p(A_j) = \frac{2n-j}{2n}}}$.

b) Si $A_j$ est réalisé, 1 tirage a été nécessaire pour passer de l'état $E_j$ à l'état $E_{j+1}$ donc $N_j / A_j$ est la variable certaine égale à 1. $\underline{\underline{N_j / A_j = 1}}$.

Si $\overline{A_j}$ est réalisé le nombre de tirages pour passer de l'état $E_j$ à l'état $E_{j+1}$ est supérieur ou égal à 2. Cela signifie que le premier tirage a mis U dans l'état $E_{j-1}$ et qu'ensuite il a fallu $N_{j-1}$ tirages pour revenir à l'état $E_j$ et $N_j$ tirages pour enfin voir U dans l'état $E_{j+1}$.

Par conséquent : $\underline{\underline{N / \overline{A_j} = 1 + N_{j-1} + N_j}}$.

c) Soit $j \in [\![1, 2n-1]\!]$. Notons que $p(A_j) \neq 0$ et $p(A_j) \neq 1$.

$$\mu_j = E(N_j) = E(N_j / A_j)\, p(A_j) + E(N_j / \overline{A_j})\, p(\overline{A_j})$$

$$\mu_j = 1 \times \frac{2n-j}{2n} + E(1 + N_{j-1} + N_j)\frac{j}{2n} \overset{\text{linéarité de l'espérance}}{=} \frac{2n-j}{2n} + (1 + \mu_{j-1} + \mu_j)\frac{j}{2n}.$$

$2n\,\mu_j = 2n - j + j + j\,\mu_{j-1} + j\,\mu_j$ ; $\underline{\underline{\mu_j = \frac{2n + j\,\mu_{j-1}}{2n - j}}}$.

d) Pour $\forall j \in [\![0, 2n-1]\!]$, $I_j = 2n\displaystyle\int_0^1 x^{2n-j-1}(2-x)^j\,dx$.

Notons que $I_0 = 2n\displaystyle\int_0^1 x^{2n-1}\,dx = 2n \times \left[\frac{x^{2n}}{2n}\right]_0^1 = 1$.

Soit $j \in [\![1, 2n-1]\!]$.

$$I_j = 2n\int_0^1 \underset{u'}{x^{2n-j-1}}\,\underset{v}{(2-x)^j}\,dx = 2n\left[\frac{x^{2n-j}}{2n-j}(2-x)^j\right]_0^1 - 2n\int_0^1 \frac{x^{2n-j}}{2n-j}\left(-j(2-x)^{j-1}\right)dx.$$

$$I_j = \frac{2n}{2n-j} + \frac{2nj}{2n-j}\int_0^1 x^{2n-j}(2-x)^{j-1}\,dx = \frac{2n}{2n-j} + \frac{j}{2n-j}I_{j-1} = \frac{2n + j\,I_{j-1}}{2n-j}. \quad (*)$$

Démontrons par récurrence que : $\forall j \in [\![0, 2n-1]\!]$, $\mu_j = I_j$.

→ $\mu_0 = E(N_0) = E(X_1 - X_0) = E(X_1) - E(X_0) = 1 - 0 = 1 = I_0$.

→ Supposons que $\mu_{j-1} = I_{j-1}$ pour $j \in [\![1, 2n-1]\!]$ et montrons que $\mu_j = I_j$.

$$\mu_j = \frac{2n + j\,\mu_{j-1}}{2n-j} \underset{\text{H.R.}}{=} \frac{2n + j\,I_{j-1}}{2n-j} \underset{(*)}{=} I_j.$$ Ceci achève la récurrence.

$$\forall j \in [\![0, 2n-1]\!],\ \mu_j = 2n\int_0^1 x^{2n-j-1}(2-x)^j\,dx.$$

Q4) $k \in [\![1, 2n]\!]$.

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} N_j = \sum_{j=0}^{k-1}(X_{j+1} - X_j) = X_k - X_0 = X_k$. $\quad \displaystyle X_k = \sum_{j=0}^{k-1} N_j$.

b) $m_k = E(X_k) = E\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} N_j\right) = \sum_{j=0}^{k-1} E(N_j) = \sum_{j=0}^{k-1}\mu_j$ … linéarité de l'espérance.

$$m_k = \sum_{j=0}^{k-1}\mu_j.$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}^* - \{1\}$. $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} x^{2n-j-1}(2-x)^j = x^{2n-1}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{2-x}{x}\right)^j \underset{\frac{2-x}{x} \neq 1 \text{ car } x \neq 1}{=} x^{2n-1}\,\frac{1 - \left(\frac{2-x}{x}\right)^k}{1 - \frac{2-x}{x}}$

$$\sum_{j=0}^{k-1} x^{2n-j-1}(2-x)^j = \frac{x^{2n-1}}{x^k}\,\frac{x^k - (2-x)^k}{\frac{2(x-1)}{x}} = x^{2n-k}\,\frac{x^k - (2-x)^k}{2(x-1)}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^* - \{1\}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} x^{2n-j-1}(2-x)^j = x^{2n-k}\,\frac{x^k - (2-x)^k}{2(x-1)}$. Notons que cette égalité vaut encore pour $x = 0$ (faire 2 cas pour la preuve : $k < 2n$ et $k = 2n$).

Remarque : On pouvait aussi utiliser : $a^k - b^k = (a-b)\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} a^{k-j-1}b^j$.

**d]** $u_k : x \mapsto \sum_{j=0}^{k-1} x^{n-j-1}(1-x)^j$ est définie et continue sur IR et $v_k : x \mapsto x^{n-k}\,\dfrac{x^k-(1-x)^k}{2x-1}$ est définie et continue sur $IR-\{\frac{1}{2}\}$. En particulier $v_k$ est localement intégrable sur $[0,1[$.

Comme $\forall x \in IR-\{\frac{1}{2}\}$, $u_k(x)=v_k(x)$, $v_k$ est prolongeable par continuité à $\frac{1}{2}$ ; mieux $u_k$ est le prolongement par continuité de $v_k$ à $\frac{1}{2}$.

Par conséquent $\displaystyle\int_0^1 x^{n-k}\,\frac{x^k-(1-x)^k}{2x-1}\,dx$ est convergente.

**Q5** mieux : $\displaystyle\int_0^1 x^{n-k}\,\frac{x^k-(1-x)^k}{2x-1}\,dx = \sum_{j=0}^{k-1}\int_0^1 x^{n-j-1}(1-x)^j\,dx$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$

En multipliant par $n$ et d'après : $\displaystyle n\int_0^1 x^{n-k}\,\frac{x^k-(1-x)^k}{2x-1}\,dx = \sum_{j=0}^{k-1}\gamma_j = m_k$ pour tout $k$ dans $[\![1,n]\!]$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle m_k = n\int_0^1 x^{n-k}\,\frac{x^k-(1-x)^k}{2x-1}\,dx$ ... est équivalent encore pour $k=0$ $(0=0)$. Un changement de variable (un peu rapide) donne alors :

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle m_k \underset{t=1-2x}{=} n\int_1^0 (1-t)^{n-k}\,\frac{(1-t)^k-(1+t)^k}{-t}(-dt)$ ou $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle m_k = n\int_0^1 (1-t)^{n-k}\,\frac{(1+t)^k-(1-t)^k}{t}\,dt$.

## PARTIE III : Etude de deux cas particuliers

**Q1** **a]** $\forall t \in IR^*$, $\dfrac{1-(1-t)^{2n}}{t} = \dfrac{1-(1-t)^{2n}}{1-(1-t)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}(1-t)^k$

$t \mapsto \dfrac{1-(1-t)^{2n}}{t}$ est continue sur $IR^*$, $t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}(1-t)^k$ est continue sur IR et

$\forall t \in IR^*$, $\dfrac{1-(1-t)^{2n}}{t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}(1-t)^k$. Donc $t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}(1-t)^k$ est le prolongement par continuité de $t \mapsto \dfrac{1-(1-t)^{2n}}{t}$ à IR.

Tout ceci montre que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t)^{2n}}{t}\,dt$ converge et vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}\int_0^1 (1-t)^k\,dt$.

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\int_0^1 (1-t)^k\,dt = \sum_{k=0}^{2n-1}\left[-\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}.$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t)^{2n}}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}$.

**b)** On pouvait pour traiter cette question utiliser la même démarche que celle de **a)**, et pourquoi ne pas utiliser a) !

En effet ce qui a été prouvé pour $n$ vaut évidemment pour $n$ et donc

$\int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\,dt$ existe et vaut $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Soit $\varepsilon \in ]0,1]$, $\int_\varepsilon^1 \frac{1-(1-t^2)^n}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}\,2t\,dt \underset{\substack{u=t^2\\ du=2tdt}}{=} \frac{1}{2}\int_{\varepsilon^2}^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}\,du$.

$\lim_{\varepsilon\mapsto 0^+} \int_{\varepsilon^2}^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}\,du = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Donc $\lim_{\varepsilon\mapsto 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1-(1-t^2)^n}{t}\,dt = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Par conséquent $\underline{\underline{\int_0^1 \frac{1-(1-t^2)^n}{t}\,dt \text{ existe et vaut } \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}}$.

**c)** $m_n = n\int_0^1 (1-t)^n \frac{(1+t)^n-(1-t)^n}{t}\,dt = n\int_0^1 \frac{(1-t^2)^n-(1-t)^{2n}}{t}\,dt$

$m_n = n\int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^{2n}}{t} - \frac{1-(1-t^2)^n}{t}\right)dt \overset{\text{les deux intégrales convergent}}{=} n\int_0^1 \frac{1-(1-t)^{2n}}{t}\,dt - n\int_0^1 \frac{1-(1-t^2)^n}{t}\,dt$

donc $m_n = n\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = n\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right) = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$

Donc $\underline{\underline{m_n = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}}}$.

**Q2** **a)** $p\in\mathbb{N}$. $t\mapsto \frac{(1+t)^p-(1-t)^p}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0

car $\frac{(1+t)^p-(1-t)^p}{t} = \frac{(1-t)^p}{t}\left[\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^p-1\right] \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}\times p\times\left(\frac{1+t}{1-t}-1\right) = \frac{p}{t}\,\frac{2t}{1-t} \underset{0}{\sim} 2p$.

(ou $(1+t)^p-(1-t)^p = 1+pt-(1-pt)+o(t) = 2pt+o(t)\ldots$)

Donc $\underline{\underline{\int_0^1 \frac{(1+t)^p-(1-t)^p}{t}\,dt \text{ converge pour tout } p\in\mathbb{N}.}}$

Soit $p \in ]1,+\infty[$. $I_p - I_{p-1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\left[(1+t)^{p-1}(1+t-1) - (1-t)^{p-1}(1-t-1)\right] dt$

$$I_p - I_{p-1} = \int_0^1 (1+t)^{p-1}\,dt + \int_0^1 (1-t)^{p-1}\,dt = \left[\frac{1}{p}(1+t)^p\right]_0^1 + \left[\frac{-1}{p}(1-t)^p\right]_0^1$$

$I_p - I_{p-1} = \frac{1}{p}2^p - \frac{1}{p} - 0 + \frac{1}{p} = \frac{2^p}{p}$. $\quad \underline{\underline{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ I_p - I_{p-1} = \frac{2^p}{p}}}$.

b) $m_n = n \displaystyle\int_0^1 \frac{(1+t)^n - (1-t)^n}{t}\,dt = n\, I_n \underset{I_0 = 0}{=} n(I_n - I_0) = n\left(\sum_{p=1}^{n}(I_p - I_{p-1})\right)$

$$\underline{\underline{m_n = n \sum_{p=1}^{n} \frac{2^p}{p}}}.$$