Exercice 1

Q1 a) Soit f_n la restriction de $t \mapsto e^{t^2}$ à $[n, +\infty[$.

f_n est continue sur $[n, +\infty[$ et $\forall x \in [n, +\infty[$, $g_n(x) = \int_n^x f_n(t)\,dt$.

Ainsi g_n est la primitive de f_n sur $[n, +\infty[$ qui prend la valeur 0 en n.

Donc g_n est dérivable sur $[n, +\infty[$ et $\forall x \in [n, +\infty[$, $g_n'(x) = e^{x^2} > 0$.

g_n est strictement croissante sur $[n, +\infty[$.

b) $\forall t \in [n, +\infty[$, $e^{t^2} \geqslant 1$. $\forall x \in [n, +\infty[$, $g_n(x) \geqslant \int_n^x dt = x - n$.

$\lim_{x \mapsto +\infty} (x - n) = +\infty$ donc $\lim_{x \mapsto +\infty} g_n(x) = +\infty$.

c) g_n est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[n, +\infty[$ donc g_n définit une bijection de $[n, +\infty[$ sur l'intervalle $[g_n(n), \lim_{x \mapsto +\infty} g_n(x)[= [0, +\infty[$

$1 \in [0, +\infty[$ donc $\exists!\, x_n \in [n, +\infty[$, $g_n(x_n) = 1$.

Q2 a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [n, +\infty[$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant n$ et $\lim_{n \mapsto +\infty} n = +\infty$ donc

$\lim_{n \mapsto +\infty} x_n = +\infty$.

b) $\forall t \in [n, x_n]$, $e^{n^2} \leqslant e^{t^2} \leqslant e^{x_n^2}$; $\int_n^{x_n} e^{n^2}\,dt \leqslant g_n(x_n) = \int_n^{x_n} e^{t^2}\,dt \leqslant \int_n^{x_n} e^{x_n^2}\,dt$

Ainsi $e^{n^2}(x_n - n) \leqslant g_n(x_n) = 1 \leqslant e^{x_n^2}(x_n - n)$.

Donc $e^{n^2}(x_n - n) \leqslant 1 \leqslant e^{x_n^2}(x_n - n)$, $(x_n - n) \leqslant e^{-n^2}$ et $e^{-x_n^2} \leqslant (x_n - n)$.

Donc $e^{-x_n^2} \leqslant x_n - n \leqslant e^{-n^2}$

Q3 a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-x_n^2} \leqslant u_n \leqslant e^{-n^2}$ et $\lim_{n \mapsto +\infty} e^{-x_n^2} = \lim_{n \mapsto +\infty} e^{-n^2} = 0$

Par encadrement il vient : $\lim u_n = 0$.

b) $\forall n\in\mathbb{N},\quad e^{-x_n^2} \leq x_n - n \leq e^{-n^2}$

$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0 \leq x - n = u_n \leq e^{-n^2}$

$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0 \leq n u_n \leq n e^{-n^2}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (n e^{-n^2}) = 0$ (croissance comparée).

Il vient alors par encadrement : $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = 0}$.

c) $\forall n\in\mathbb{N},\quad e^{-x_n^2} \leq x_n - n \leq e^{-n^2}$; $\forall n\in\mathbb{N},\quad e^{-x_n^2+n^2} \leq e^{n^2}(x_n - n) \leq 1$

$\forall n\in\mathbb{N},\quad e^{n^2-x_n^2} \leq \dfrac{x_n - n}{e^{-n^2}} \leq 1$. Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n - n}{e^{-n^2}} = 1$ il suffit de

prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n^2-x_n^2} = 1$ c'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - x_n^2) = 0$

$\forall n\in\mathbb{N},\quad x_n \overset{Q2b}{\leq} e^{-n^2} + n$; $\forall n\in\mathbb{N},\quad x_n^2 \leq e^{-2n^2} + 2n e^{-n^2} + n^2$

$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0 \leq x_n^2 - n^2 \leq e^{-2n^2} + 2n e^{-n^2}$

Par encadrement il vient alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n^2 - n^2) = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^{-2n^2} + 2n e^{-n^2}) = 0$

Ceci achève alors de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n - n}{e^{-n^2}} = 1$ et donc que $\underline{x_n - n \sim e^{-n^2}}$

Exercice 2

Q1 a) 1) Chaque tirage d'ordre pair n'affecte pas la composition de l'urne.
2) Chaque tirage d'ordre impair réduit une boule de l'urne.
L'urne est vide après exactement n tirages d'ordre impair ; l'urne est vide après exactement $2n-1$ tirages.
<u>Le nombre total N de tirages effectués lors de cet épreuve est $N=2n-1$.</u>

b) Avant le $(2j)^{ème}$ tirage il y a eu exactement j tirages d'ordre impair (les tirages N° $1, 3, 5, \dots, 2j-1$) ;
<u>Avant le $(2j)^{ème}$ tirage il reste $n-j$ boules dans l'urne.</u>

De même avant le $(2j+1)^{ème}$ tirage il y a eu exactement j tirages d'ordre impair.
<u>Avant le $(2j+1)^{ème}$ tirage il reste $n-j$ boules dans l'urne.</u>

Q2 a) <u>$p(X_1=1)=\frac{1}{n}$</u> (au départ il y a 1 boule noire et $n-1$ blanches).

Notons N_i (resp. B_i) l'événement le $i^{ème}$ tirage donne une boule noire (resp. blanche).

$p(X_2=1)=p(N_2)=\underbrace{p(N_1\cap N_2)}_{=0 \text{ car on ne remet pas la boule du } 1^{er} \text{ tirage}}+p(B_1\cap N_2) = p(B_1)\times p(N_2/B_1)=\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$.

<u>$p(X_2=1)=\frac{1}{n}$.</u>

b) Soit $j\in [\![1, n-1]\!]$.
$(X_{2j+1}=1)$ se réalise si et seulement si la boule noire est dans l'urne avant le $(2j+1)^{ème}$ tirage et si elle est obtenue au $(2j+1)^{ème}$ tirage.
Ainsi $(X_{2j+1}=1)$ se réalise si et seulement si les tirages d'ordre impair précédant le $(2j+1)^{ème}$ tirage donne une boule blanche et le $(2j+1)^{ème}$ tirage donne une

<u>$(X_{2j+1}=1)=B_1\cap B_3\cap\dots\cap B_{2j-1}\cap N_{2j+1}$.</u>

$p(X_{2j+1}=1)=p(B_1)p(B_3/B_1)\cdots p(B_{2j-1}/B_1\cap B_3\cap\dots\cap B_{2j-3})\,p(N_{2j+1}/B_1\cap B_3\cap\dots\cap B_{2j-1})$.

$p(X_{2j+1}=1) = p(B_1)\left(\prod_{k=1}^{j-1} p(B_{2k+1}/B_1 \cap B_3 \cap \dots \cap B_{2k-1})\right) p(N_{2j+1}/B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{2j-1})$

$p(B_1) = \frac{n-1}{n}$. $p(B_{2k+1}/B_1 \cap B_3 \cap \dots \cap B_{2k-1}) = \frac{n-k-1}{n-k}$ (si $B_1 \cap B_2 \dots \cap B_{2k-1}$ est réalisé le $(2k+1)^{\text{ème}}$ tirage a lieu et l'urne contient avant ce tirage $n-k$ boules dont la boule noire)

$p(N_{2j+1}/B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{2j-1}) = \frac{1}{n-j}$.

Ainsi $p(X_{2j+1}=1) = \frac{n-1}{n}\left(\prod_{k=1}^{j-1} \frac{n-k-1}{n-k}\right)\frac{1}{n-j} = \frac{1}{n}\ \frac{(n-1)\prod_{k=1}^{j-1}(n-k-1)}{(n-j)\prod_{k=1}^{j-1}(n-k)} = \frac{1}{n}\ \frac{\prod_{k=0}^{j-1}(n-k-1)}{\prod_{k=1}^{j}(n-k)}$

$p(X_{2j+1}=1) = \frac{1}{n}\ \frac{\prod_{k=1}^{j}(n-k)}{\prod_{k=1}^{j}(n-k)} = \frac{1}{n}$. $\underline{\underline{p(X_{2j+1}=1) = \frac{1}{n}}}$.

Plus rapidement :

$p(X_{2j}=1) = p(B_1 \cap B_3 \cap \dots \cap B_{2j-1} \cap N_{2j}) = p(B_1)p(B_2/B_1) \dots p(B_{2j-1}/B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{2j-1})p(N_{2j}/B_1 \cap B_2 \cap \dots)$

$p(X_{2j}=1) = p(B_1)\left(\prod_{k=1}^{j-1} p(B_{2k+1}/B_1 \cap B_3 \cap \dots \cap B_{2k-1})\right) p(N_{2j}/B_1 \cap B_3 \cap \dots \cap B_{2j-1})$

$p(X_{2j}=1) = \frac{n-1}{n} \times \prod_{k=1}^{j-1} \frac{n-k-1}{n-k} \times \frac{1}{n-j} = \frac{n-1}{n} \times \frac{\prod_{k=2}^{j}(n-k)}{\prod_{k=1}^{j-1}(n-k)} \times \frac{1}{n-j} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-j}{n-1} \times \frac{1}{n-j}$

donc $p(X_{2j}=1) = \frac{1}{n}$

Finalement $\underline{\underline{\forall j \in [\![1, n-1]\!],\ p(X_{2j+1}=1) = p(X_{2j}=1) = \frac{1}{n}}}$.

Mieux : $\underline{\underline{\forall j \in [\![0, n-1]\!],\ p(X_{2j+1}=1) = \frac{1}{n} \text{ et } \forall j \in [\![1, n-1]\!],\ p(X_{2j}=1) = \frac{1}{n}}}$.

c) Ce qui précède montre que pour tout $k \in [\![1, 2n-1]\!]$, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$.

Q3 a) Avant le $(2n-2)^{\text{ème}}$ tirage il ne reste plus qu'une boule dans l'urne ou cette boule est blanche, la noire a donc déjà été tirée, et U_n ne peut se réaliser ; ou cette boule est noire et le $(2n-2)^{\text{ème}}$ tirage amènera une boule noire et là encore U_n ne se réalise pas.

Ainsi $\underline{\underline{p(U_n) = 0}}$.

Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$ (en toute rigueur il faudrait supposer $j \geq 3$ et traiter les cas particuliers $j=1$ et $j=2$ ...)

$U_j = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \dots \cap B_{2j-2} \cap N_{2j-1}$.

$p(U_j) = p(B_1)\,p(B_2/B_1) \dots p(B_{2j-2}/B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{2j-3})\,p(N_{2j-1}/B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{2j-2})$.

Nous savons déjà que $p(B_1) = \frac{n-1}{n}$ et $p(N_{2j-1}/B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{2j-2}) = \frac{1}{n-(j-1)}$ (si $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{2j-2}$ est réalisé, avant le $(2j-1)^{\text{ème}}$ tirage il reste dans l'urne $n-(j-1)$ boules dont 1 noire)

$$p(U_j) = \frac{n-1}{n} \prod_{k=1}^{j-1} p(B_{2k}/B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{2k-1}) \prod_{k=1}^{j-2} p(B_{2k+1}/B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{2k}) \quad \frac{1}{n-j+1}.$$

$p(B_{2k}/B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{2k-1}) = \dfrac{n-k-1}{n-k}$ car si $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{2k-1}$ est réalisé il reste dans l'urne avant le $(2k)^{\text{ème}}$ tirage $n-k$ boules dont $n-k-1$ blanches

$p(B_{2k+1}/B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{2k}) = \dfrac{n-k-1}{n-k}$ car si $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{2k}$ est réalisé il reste dans l'urne avant le $(2k+1)^{\text{ème}}$ tirage $n-k$ boules dont $n-k-1$ blanches.

$$\text{Ainsi} \quad p(U_j) = \frac{n-1}{n}\left(\prod_{k=1}^{j-1} \frac{n-k-1}{n-k}\right) \times \left(\prod_{k=1}^{j-2} \frac{n-k-1}{n-k}\right) \times \frac{1}{n-j+1}$$

$$p(U_j) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-(j-1)-1}{n-1} \times \frac{n-(j-2)-1}{n-1} \times \frac{1}{n-j+1} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-j}{n-1} \times \frac{n-j+1}{n-1} \times \frac{1}{n-j+1}$$

Donc $\underline{\underline{p(U_j) = \dfrac{n-j}{n(n-1)}}}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

b) $\{X=1\} = \bigcup_{j=1}^{n} U_j$. $p(X=1) = \sum_{j=1}^{n} p(U_j)$ (car les U_j sont 2 à 2 disjoints).

$$p(X=1) = \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n(n-1)} \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$p(X=1) = \frac{1}{2}.$$

c) $\{X=n\}$ se réalise si et seulement si on obtient n fois la boule noire

Notons que si $j \in [\![1, n-1]\!]$ et si le $(2j-1)^{\text{ème}}$ tirage amène une boule noire

1) les tirages n° 1, 3, ..., 2j-3 ont donné une boule blanche

2) on a obtenu avant ce tirage au plus $j-1$ boules noires

3) il n'y aura plus d'apparition de la boule noire après le $(2j-1)^{\text{ème}}$ tirage

$(j-1)+1 = j$ et $j \leq n-2$!

Ainsi $\{X=n\}$ se réalise si et seulement si on obtient une blanche au rang 1, 3, 5, ..., 2n-3 et une boule noire au rang 2, 4, 6, ..., 2n-2, 2n-1.

$$\{X=n\} = B_1 \cap N_2 \cap B_3 \cap N_4 \cap \dots \cap B_{2n-3} \cap N_{2n-2} \cap N_{2n-1}.$$

$$p(X=n) = p(B_1)\, p(N_2/B_1)\, p(B_3/B_1 \cap N_2) \dots p(B_{2n-3}/B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{2n-4})\, p(N_{2n-2}/B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap B_{2n-3})$$
$$\times\ p(N_{2n-1}/B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{2n-2}).$$

$$p(X=n) = p(B_1) \prod_{k=1}^{n-1} p(N_{2k}/B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{2k-2} \cap B_{2k-1}) \prod_{k=1}^{n-2} p(B_{2k+1}/B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap B_{2k-1} \cap N_{2k}) \times$$
$$p(N_{2n-1}/B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{2n-2})$$

$$p(X=n) = \frac{n-1}{n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} \times \prod_{k=1}^{n-2} \frac{n-k-1}{n-k} \times \frac{1}{n-(n-1)}$$

$$p(X=n) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{(n-1)!} \times \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{n!}. \qquad p(X=n) = \frac{1}{n!}.$$

Q4 Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, X_k est le nombre (!) de boules "noires" obtenues au $k^{\text{ème}}$ tirage et X est le nombre de boules noires obtenues au cours des $n-1$ tirages.

Ainsi $X = \sum_{k=1}^{n-1} X_k$.

La linéarité de l'espérance donne : $E(X) = E(\sum_{k=1}^{n-1} X_k) = \sum_{k=1}^{n-1} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$.

$E(X) = 1 - \frac{1}{n}$.

Q5 $i \in [\![0, n-2]\!]$. a) $j \in [\![1, n-2i-2]\!]$.

$p(X_{2i+j+1} = 1 / X_{2i+1} = 1) = 0$ car si $\{X_{2i+1} = 1\}$ est réalisé le $(2i+1)^{\text{ème}}$ tirage a donné la boule noire que l'on ne remet pas dans l'urne ; les tirages suivants ne peuvent que donner des boules blanches et $\{X_{2i+j+1} = 1\}$ ne peut se réaliser.

$\forall j \in [\![1, n-2i-2]\!]$, $p(X_{2i+j+1} = 1 / X_{2i+1} = 1) = 0$.

b) Soit $j \in [\![1, n-2i-2]\!]$.

$\mathrm{cov}(X_{2i+1}, X_{2i+j+1}) = E(X_{2i+1} X_{2i+j+1}) - E(X_{2i+1}) E(X_{2i+j+1})$

$\mathrm{cov}(X_{2i+1}, X_{2i+j+1}) = p(\{X_{2i+1} = 1\} \cap \{X_{2i+j+1} = 1\}) - \frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$

$\mathrm{cov}(X_{2i+1}, X_{2i+j+1}) = p(X_{2i+1} = 1)\, p(X_{2i+j+1} = 1 / X_{2i+1} = 1) - \frac{1}{n^2} = 0 - \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{n^2}$.

$\forall j \in [\![1, n-2i-2]\!]$, $\mathrm{cov}(X_{2i+1}, X_{2i+j+1}) = -\frac{1}{n^2}$.

Q6 $i \in [\![1, n-1]\!]$.

a) et b) Supposons $\{X_{2i} = 1\}$ réalisé. Avant le tirage suivant il reste $n-i$ boules dans l'urne dont la boule noire

C'est exactement la situation initiale en remplaçant n par $n-i$ (au moins si $n-i \geq 2$!). Ainsi la probabilité pour qu'un des tirages suivants donne la boule noire est $\frac{1}{n-i}$.

Donc si $n-i \geq 2$: $P(X_{2i+j}=1 / X_{2i}=1) = \frac{1}{n-i}$ pour tout élément j de $[\![1, 2n-1-2i]\!]$.

Supposons $n-i=1$. $i=n-1$. $2i=2n-2$. $\{X_{2i}=1\} = \{X_{2n-2}=1\}$ étant réalisé il reste dans l'urne uniquement la boule noire et plus qu'un seul tirage à faire. $P(X_{2n-1}=1 / X_{2n-2}=1) = 1 = \frac{1}{n-(n-1)}$.

Donc $P(X_{2n-1}=1 / X_{2i}=1) = \frac{1}{n-i}$; mieux $\forall j \in [\![1, 2n-1-2i]\!]$, $P(X_{2i+j}=1/X_{2i}=1) = \frac{1}{n-i}$

Finalement $\underline{\underline{\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \forall j \in [\![1, 2n-1-2i]\!],\ P(X_{2i+j}=1 / X_{2i}=1) = \frac{1}{n-i}}}$.

Ceci contient largement les résultats demandés, non ?!!

c) Soit $j \in [\![1, 2n-2i-1]\!]$.

$cov(X_{2i}, X_{2i+j}) = E(X_{2i}X_{2i+j}) - E(X_{2i})E(X_{2i+j}) = P(X_{2i}X_{2i+j}=1) - \frac{1}{n^2}$.

$cov(X_{2i}, X_{2i+j}) = P(X_{2i}=1 \cap X_{2i+j}=1) - \frac{1}{n^2} = P(X_{2i}=1/X_{2i+j}=1)P(X_{2i+j}=1) - \frac{1}{n^2}$.

$cov(X_{2i}, X_{2i+j}) = \frac{1}{n-i} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-(n-i)}{n^2(n-i)} = \frac{i}{n^2(n-i)}$

$\underline{\underline{\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \forall j \in [\![1, 2n-2i-1]\!],\ cov(X_{2i}, X_{2i+j}) = \frac{i}{n^2(n-i)}}}$.

Q7 $V(X) = V\left(\sum_{k=1}^{2n-1} X_k\right) = \sum_{k=1}^{2n-1} V(X_k) + 2\sum_{1 \leq i < j \leq 2n-1} cov(X_i, X_j)$

$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $V(X_k) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}$. $V(X) = \frac{(2n-1)(n-1)}{n^2} + 2\underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq 2n-1} cov(X_i, X_j)}_{S}$

$$S = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{2n-2i-2} cov(X_{2i+1}, X_{2i+1+j}) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{2n-2i-1} cov(X_{2i}, X_{2i+j})$$

$$S = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{2n-2i-2} \left(-\frac{1}{n^2}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{2n-2i-1} \frac{i}{n^2(n-i)} = -\sum_{i=0}^{n-2} \frac{2n-2i-2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(2n-2i-1)}{n^2(n-i)} .$$

$$S = -\frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-2} (n-i-1) + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)(2k-1)}{k} \quad (k = n-i)$$

$$S = -\frac{2}{n^2} \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{n}{k} + 2n+1-2k\right) = -\frac{2}{n^2} \frac{(n-1)(n)}{2} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n^2} (2n+1)(n-1) - \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k .$$

$$S = -\frac{n-1}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{(2n+1)(n-1)}{n^2} - \frac{2}{n^2} \frac{(n-1)(n)}{2}$$

$$S = -\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n^2} (2n^2 - 2n + n - 1 - n^2 + n) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = -\frac{n-1}{n} + \frac{n^2-1}{n^2} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$S = \frac{n-1}{n^2} [n+1-n] - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{n-1}{n^2} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} .$$

Alors $V(X) = \dfrac{(2n-1)(n-1)}{n^2} + 2\left[\dfrac{n-1}{n^2} - \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k}\right]$

$$V(X) = \frac{n-1}{n^2} [2n-1+2] - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

<u>ou</u> $V(X) = \dfrac{(2n+1)(n-1)}{n^2} - \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{1}{j} .$

Exercice 3

(Q1) $u^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$; ainsi $u^2=-Id$ et (A_1) est vérifiée.

$V=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ donc $v\neq Id$ et (A_2) est vérifiée.

$(V-I)^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$; $(v-Id)^2=\theta$; (A_3) est vérifiée.

$U+V-I=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$; $(u+v-Id)(j)=0$; $Ker(u+v-Id)\neq\{0\}$ et (A_4) est vérifiée et <u>(u,v) est solution du problème</u>.

<u>Remarque fondamentale</u> : ceci est encore vrai si l'on remplace $\mathcal{B}$ par une base quelconque de $\mathbb{R}^2$.

(Q2) a) D'après (A_1) X^2+1 est un polynôme annulateur de u. Ce polynôme n'a pas de zéro dans $\mathbb{R}$, ainsi 0 n'est pas valeur propre de u. u est donc injective et ainsi bijectif car $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et $\dim\mathbb{R}^2=2<+\infty$.

<u>u est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.</u> $u^2=-Id$; $u^{-1}\circ u\circ u=-u^{-1}\circ Id=-u^{-1}$; $u=-u^{-1}$.

<u>$u^{-1}=-u$.</u>

<u>Remarque</u> : On pouvait aussi écrire $u\circ(-u)=Id=(-u)\circ u$.

v et Id commutent donc $\theta=(v-Id)^2=v^2-2v+Id$; $2v-v^2=Id$;

$(2Id-v)\circ v=v\circ(2Id-v)=Id$.

Ceci montre que <u>v est bijectif et que $v^{-1}=2Id-v$.</u>

<u>v est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et $v^{-1}=2Id-v$.</u>

b) (v1) $v\circ(v-Id)=v^2-v=v-Id$ car $v^2-2v+Id=\theta$.

$v^2\circ(v-Id)=v\circ(v-Id)=v-Id$ ... you see?

$\forall k\in\mathbb{N}$, $v^{k+1}\circ(v-Id)=v^k\circ(v\circ(v-Id))=v^k\circ(v-Id)$.

La suite $(v^k\circ(v-Id))$ est constante. Ainsi $\forall k\in\mathbb{N}$, $v^k\circ(v-Id)=v^0\circ(v-Id)=v-Id$.

Donc $\forall k\in\mathbb{N}$, $v^{k+1}-v^k=v-Id$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1}(v^{k+1}-v^k)=n(v-Id)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v^n = nv - (n-1)\,Id$; ceci vaut encore pour $n=0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v^n = nv - (n-1)Id$.

(V2) $(v-Id)^2 = \theta$ donc $\forall k \in [\![2, +\infty[\![$, $(v-Id)^k = \theta$.

Comme v et $v-Id$ commutent : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v^n = (v - Id + Id)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (v-Id)^k (Id)^{n-k} = \sum_{k=0}^{1} C_n^k (v-Id)^k$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v^n = C_n^0 (v-Id)^0 + C_n^1 (v-Id) = Id + n(v-Id) = nv - (n-1)Id$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v^n = nv - (n-1)Id$ ... ce qui vaut encore pour $n=0$.

(Q3) a) Soit $x \in \mathrm{Im}(v-Id)$. $\exists t \in \mathbb{R}^2$, $x = (v-Id)(t)$.

$(v-Id)(x) = (v-Id)^2(t) = \theta(t) = 0$; $x \in \mathrm{Ker}(v-Id)$.

Ainsi $\mathrm{Im}(v-Id) \subset \mathrm{Ker}(v-Id)$.

Remarque.. Plus généralement si f et g sont deux endomorphismes d'un K-espace vectoriel E :

$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker}\, g$.

b) $\dim \mathrm{Im}(v-Id) + \dim \mathrm{Ker}(v-Id) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

$\dim(\mathrm{Ker}(v-Id)) = 2 \Rightarrow \mathrm{Ker}(v-Id) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow v - Id = \theta \Rightarrow v = Id$!

Ainsi $\dim(\mathrm{Ker}(v-Id)) \leq 1$ donc $\dim(\mathrm{Im}(v-Id)) = 2 - \dim(\mathrm{Ker}(v-Id)) \geq 2-1 = 1$.

Finalement $1 \leq \dim(\mathrm{Im}(v-Id)) \overset{*}{\leq} \dim(\mathrm{Ker}(v-Id)) \leq 1$ $\quad$ * $\mathrm{Im}(v-Id) \subset \mathrm{Ker}(v-Id)$.

donc $\dim(\mathrm{Im}(v-Id)) = \dim(\mathrm{Ker}(v-Id)) = 1$ et $\mathrm{Im}(v-Id) \subset \mathrm{Ker}(v-Id)$.

Ainsi $\mathrm{Im}(v-Id) = \mathrm{Ker}(v-Id)$.

(Q4) $\mathrm{Ker}(u+v-Id) \neq \{0\}$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(u+v-Id)) \geq 1$.

Mieux $1 \leq \dim(\mathrm{Ker}(u+v-Id)) \leq 2$; $\dim(\mathrm{Ker}(u+v-Id)) = 1$ ou 2.

Supposons $\dim(\mathrm{Ker}(u+v-Id)) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Alors $\mathrm{Ker}(u+v-Id) = \mathbb{R}^2$.

Donc $u + v - Id = \theta$; $u = -(v-Id)$; $u^2 = (v-Id)^2 = \theta$; $u^2 = \theta$ et

donc $\theta = -Id$!

Finalement $\dim(\mathrm{Ker}(u+v-Id)) = 1$.

Q5 **a)** Comme $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ pour montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ il suffit de montrer que cette famille est libre. Supposons qu'elle est liée.

e_2 n'étant pas nul : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $e_1 = \lambda e_2$. Alors $-u(e_2) = \lambda e_2$.

$e_2 \neq 0$ et $u(e_2) = (-\lambda) e_2$; $-\lambda$ est un réel valeur propre de u. Ceci contredit ce que nous avons vu dans Q1 (si ℓ est une valeur propre de u : $\ell^2 + 1 = 0$...)

Ainsi (e_1, e_2) est libre. $\underline{(e_1, e_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$.

b) Posons $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$. $u(e_1) = -u^2(e_2) = e_2$ et $u(e_2) = -e_1$:

Donc $\underline{M_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

$(u + v - Id)(e_2) = 0$ car $e_2 \in \operatorname{Ker}(u + v - Id)$; $v(e_2) = e_2 - u(e_2) = e_2 + e_1$.

$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $v(e_1) = \alpha e_1 + \beta e_2$.

Ainsi $M_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$. $(v - Id)^2 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \left[\begin{pmatrix} \alpha-1 & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} (\alpha-1)^2+\beta & \alpha-1 \\ \beta(\alpha-1) & 0 \end{pmatrix}$

Donc $(\alpha - 1)^2 + \beta = \beta(\alpha - 1) = \alpha - 1 = 0$; $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

$$\underline{M_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Q6 Conclusion ! Soient u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$.

$\underline{(u, v) \text{ vérifie } (A_1), (A_2), (A_3) \text{ et } (A_4) \text{ si et seulement si il existe une base } \mathcal{B}'}$ $\underline{\text{de } \mathbb{R}^2 \text{ telle que : } M_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

La condition est suffisante d'après la remarque fondamentale de Q1 et nécessaire d'après Q2 $\leftrightarrow$ Q5.

PROBLÈME

Partie 1.

Q1 Par définition $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une famille génératrice de E_n.
Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k f_k = 0_{E_n}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k e^{-x} = \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k\right) e^{-x}$. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k = 0$.

Le polynôme $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ admet alors une infinité de racines, ce polynôme est le polynôme nul ; ses coefficients sont nuls. Ainsi $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Ceci achève de prouver que $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre de E_n.

Finalement $\underline{\underline{(f_0, f_1, \dots, f_n) \text{ est une base de } E_n}}$.

Q2 a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ k f_{k-1}(x) - f_k(x) = k x^{k-1} e^{-x} - x^k e^{-x} = (k x^{k-1}) e^{-x} + x^k(-e^{-x}) = f_k'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ d(f_k)(x) = (k f_{k-1} - f_k)(x)$.

Finalement $\underline{\underline{\forall k \in [\![1, n]\!],\ d(f_k) = k f_{k-1} - f_k}}$.

b) * Soit $(f, g) \in E_n^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$d(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' = \lambda f' + g' = \lambda d(f) + d(g)$
d est linéaire.

* $d(f_0) = f_0' = -f_0$ (la dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$) ; $d(f_0) \in E_n$.
$\forall k \in [\![1, n]\!],\ d(f_k) = k f_{k-1} - f_k \in \mathrm{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_n) = E_n$.
Donc $\underline{\forall k \in [\![0, n]\!],\ d(f_k) \in E_n}$.

Soit $f \in E_n$. $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ f = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k$.

$d(f) = d\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k d(f_k) \in E_n$. $\forall f \in E_n,\ d(f) \in E_n$.

Ceci achève alors de prouver que d est un endomorphisme de E_n.

Q3 a] Soit $f \in \operatorname{Ker} d$. $f' = 0_{E_n}$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \lambda$.

$f \in E_n$ donc $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $f = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f_k$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\lambda = f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k e^{-x}$. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k e^{-x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \frac{x^k}{e^x} = 0$

Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \lambda$. Nécessairement $\lambda = 0$. $f = 0_{E_n}$.

Finalement $\operatorname{Ker} d = \{0_{E_n}\}$. d est un endomorphisme injectif de E_n qui est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n+1$; ceci suffit pour dire que :

<u>d est un automorphisme de E_n.</u>

b] Soit $k \in [\![1, n]\!]$, $d(f_k) = k f_{k-1} - f_k$.

$d\left(\frac{1}{k!} f_k\right) = \frac{1}{k!} d(f_k) = \frac{1}{k!} \left[k f_{k-1} - f_k \right] = \frac{1}{(k-1)!} f_{k-1} - \frac{1}{k!} f_k$.

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ d\left(\frac{1}{k!} f_k\right) = \frac{1}{(k-1)!} f_{k-1} - \frac{1}{k!} f_k$$

c] $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $d^{-1}\left(d\left(\frac{1}{k!} f_k\right)\right) = d^{-1}\left(\frac{1}{(k-1)!} f_{k-1} - \frac{1}{k!} f_k\right) = \frac{1}{(k-1)!} d^{-1}(f_{k-1}) - \frac{1}{k!} d^{-1}(f_k)$.

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{1}{k!} f_k = \frac{1}{(k-1)!} d^{-1}(f_{k-1}) - \frac{1}{k!} d^{-1}(f_k)$.

$\forall j \in [\![1, n]\!]$ $\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k!} f_k = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{(k-1)!} d^{-1}(f_{k-1}) - \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k!} d^{-1}(f_k) = \frac{1}{0!} d^{-1}(f_0) - \frac{1}{j!} d^{-1}(f_j)$.

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $d^{-1}(f_j) = j! \left[- \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k!} f_k + d^{-1}(f_0) \right]$

Notons que $d(f_0) = -f_0$ donc $f_0 = d^{-1}(-f_0) = -d^{-1}(f_0)$; $d^{-1}(f_0) = -f_0$.

Ainsi $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $d^{-1}(f_j) = j! \left[- \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k!} f_k - f_0 \right] = -j! \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!} f_k$.

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $d^{-1}(f_j) = -j! \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!} f_k$. Cette dernière égalité vaut encore pour $j = 0$.

$$\text{Ainsi } \forall j \in [\![0, n]\!], \ d^{-1}(f_j) = -j! \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!} f_k.$$

(Q4) Soit $j \in \mathbb{N}$. $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $j \in [\![0,n]\!]$ (!).

Posons $g_j = d^{-1}(f_j)$; $d(g_j) = f_j$ donc $g_j' = f_j$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. $\int_0^A x^j e^{-x}\,dx = \int_0^A f_j(x)\,dx = \int_0^A g_j'(x)\,dx = g_j(A) - g_j(0)$.

$$\int_0^A x^j e^{-x}\,dx = g_j(A) - g_j(0) = -j! \sum_{\ell=0}^{j} \frac{1}{\ell!} f_\ell(A) + j! \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{\ell!} f_k(0).$$

Notons que : $\forall k \in [\![0,j]\!]$, $\lim_{A\to+\infty} f_k(A) = \lim_{A\to+\infty}(A^k e^{-A}) = 0$ et $f_k(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \geq 1 \\ 1 \text{ si } k = 0 \end{cases}$

Ainsi $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A x^j e^{-x}\,dx = -j! \sum_{\ell=0}^{j} \frac{1}{\ell!} \times 0 + j! \times \frac{1}{0!} \times 1 = j!$.

Donc $\int_0^{+\infty} x^j e^{-x}\,dx$ existe et vaut $j!$

Pour tout j dans $\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^j e^{-x}\,dx$ existe et vaut $j!$ ... qui est un résultat du programme ; $\Gamma(j+1) = j!$

(Q5) * Soit $(f,g) \in E_n^2$.

Montrons que $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{x}\,dx$ converge.

$\exists(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\exists(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $f = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i$ et $g = \sum_{i=0}^{n} \beta_i f_i$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i\right) e^{-x}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i x^i\right) e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x)g(x)e^{x} = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i x^i\right) e^{-x} e^{-x} e^{x}$

Posons $\varphi = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i X^i\right)$. $\varphi \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ donc $\exists(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, $\varphi = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j X^j$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x)g(x)e^{x} = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j x^j e^{-x}$

Pour tout $j \in [\![0,2n]\!]$, $\int_0^{+\infty} x^j e^{-x}\,dx$ converge donc $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{x}\,dx$ converge également.

Ainsi si $(f,g) \in E_n^2$, $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{x}\,dx$ converge.

* Soit $(f,g,h)\in E_n^3$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\int_0^{+\infty}[(\lambda f+g)h](x)e^{x}dx=\int_0^{+\infty}[\lambda f(x)h(x)e^{x}+g(x)h(x)e^{x}]dx=\lambda\int_0^{+\infty} f(x)h(x)e^{x}dx+\int_0^{+\infty}g(x)h(x)e^{x}dx$$

↑ toutes les intégrales convergent.

Ainsi $(\lambda f+g|h)=\lambda(f|h)+(g|h)$

* Soit $(f,g)\in E_n^3$. $(f|g)=\int_0^{+\infty}(fg)(x)e^{x}dx=\int_0^{+\infty}(gf)(x)e^{x}dx=(g|f)$; $(f|g)=(g|f)$.

* Soit $f\in E_n$. $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f^2(x)e^{x}\geqslant 0$; $\int_0^{+\infty}f^2(x)e^{x}dx\geqslant 0$; $(f|f)\geqslant 0$.

Supposons $(f|f)=0$. Alors $x\mapsto f^2(x)e^{x}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, et $\int_0^{+\infty}f^2(x)e^{x}dx=0$.

Alors $x\mapsto f^2(x)e^{x}$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$. $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f^2(x)e^{x}=0$; $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f^2(x)=0$. $f=0_{E_n}$.

Ainsi $(f|f)=0\Rightarrow f=0$.

Les quatre points précédents montrent que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E_n.

Partie 2 (Q1) a) Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E. Pour tout élément x de E il existe un unique élément x^* de F tel que $\|x-x^*\|=\min_{y\in F}\|x-y\|$; x^* est la projection orthogonale de x sur F.

E_{n-1} est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien $(E_n,(\cdot|\cdot))$ et f_n est un élément de E_n. Par conséquent il existe un unique élément h de E_{n-1} tel que :

$\|f_n-h\|=\min_{g\in E_{n-1}}\|f_n-g\|=\inf_{g\in E_{n-1}}\|f_n-g\|$. h est la projection orthogonale de f_n sur E_{n-1}.

$h\in E_{n-1}$; ceci permet d'écrire $h=-\sum_{i=0}^{n-1}a_if_i$.

b) h est la projection orthogonale de f_n sur E_{n-1} donc $h\in E_{n-1}$ et $f_n-h\in E_{n-1}^{\perp}$

Comme $E_{n-1}=\mathrm{Vect}(f_0,f_1,\dots,f_{n-1})$, pour tout k dans $[\![0,n-1]\!]$, f_n-h est orthogonal à f_k

c) Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$.

$$0=(f_n-h|f_k)=(f_n|f_k)-(h|f_k)=(f_n|f_k)-\left(-\sum_{j=0}^{n-1}a_jf_j|f_k\right)=(f_n|f_k)+\sum_{j=0}^{n-1}a_j(f_j|f_k).$$

$$0=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} x^{\ell} e^{-x} e^{x}\,dx+\sum_{j=0}^{n-1} a_j\int_0^{+\infty} x^j e^{-x} x^{\ell} e^{-x} e^{x}\,dx=\int_0^{+\infty} x^{n+\ell} e^{-x}dx+\sum_{j=0}^{n-1} a_j\int_0^{+\infty} x^{j+\ell}e^{-x}dx$$

donc $\sum_{j=0}^{n-1} a_j I_{j+k}+I_{n+k}=0$; $\sum_{j=0}^{n-1} a_j (j+k)!+(k+n)!=0$

$\forall \ell\in [\![0,n-1]\!]$, $\sum_{j=0}^{n-1} a_j (j+\ell)!+(\ell+n)!=0$.

Q2 a) Soit $k\in [\![0,n-1]\!]$.

$$P(k)=a_0+\sum_{j=1}^{n-1} a_j (k+1)\cdots(k+j)+(k+1)(k+2)\cdots(k+n)$$

$$P(k)=a_0+\sum_{j=1}^{n-1} a_j\frac{(k+j)!}{k!}+\frac{(k+n)!}{k!}=\frac{1}{k!}\Big[a_0\, k!+\sum_{j=1}^{n-1} a_j (j+k)!+(k+n)!\Big]$$

$$P(k)=\frac{1}{k!}\Big[\sum_{j=0}^{n-1} a_j (j+k)!+(k+n)!\Big]=0.$$

$\forall k\in [\![0,n-1]\!]$, $P(k)=0$.

$0,1,2,\dots,n-1$ sont des zéros de P. $X(X-1)\cdots(X-(n-1))$ divise P. $\exists Q\in\mathbb{R}[X]$, $P=Q\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$

Or remarque : $\deg P=\deg[(X+1)(X+2)\cdots(X+n)]=n$ et $\deg\big(\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)\big)=n$.

Nécessairement $\deg Q=0$. $\exists\lambda\in\mathbb{R}^*$, $Q=\lambda$.

Ainsi $P=\lambda\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$.

Le coefficient de X^n dans P est encore le coefficient de X^n dans $(X+1)\cdots(X+n)$ c'est-à-dire 1.

Le coefficient de X^n dans $\lambda\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$ est λ. Ainsi $\lambda=1$ et $P=\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$.

$P(n)=\prod_{k=0}^{n-1}(n-k)=\prod_{i=1}^{n} i=n!$. $P(n)=n!$

Q3 a) $h\in E_{n-1}$ et $f_n-h\in E_{n-1}^{\perp}$ donc $\|f_n-h\|^2=(f_n-h\,|\,f_n-h)=(f_n-h\,|\,f_n)-\underbrace{(f_n-h\,|\,h)}_{=0}=(f_n-h\,|\,f_n)$.

$\|f_n-h\|^2=(f_n-h\,|\,f_n)$.

b) $m=\underset{(\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1})\in\mathbb{R}^n}{\mathrm{Inf}}\int_0^{+\infty}\Big(x^n-\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k x^k\Big)^2 e^{-x}=\underset{(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\in\mathbb{R}^n}{\mathrm{Inf}}\int_0^{+\infty}\Big(x^n e^{-x}-\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k x^k e^{-x}\Big)^2 e^{x}\,dx$

$$m = \inf_{g\in E_{n-1}} \int_0^{+\infty} (f_n(x)-g(x))^2 e^{-x}\,dx = \inf_{g\in E_{n-1}} \|f_n - g\|^2 = \|f_n - h\|^2 = (f_n - h \mid f_n)$$

$$(f_n - h \mid f_n) = (f_n \mid f_n) + (-h \mid f_n) = (f_n \mid f_n) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j (f_j \mid f_n) = (n+n)! + \sum_{j=0}^{n-1} a_j (j+n)! = \sum_{j=0}^{n-1} a_j (n+j)! + (2n)!$$

$$P(n) = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j (n+1)\cdots(n+j) + (n+1)(n+2)\cdots(n+n).$$

$$n!\,P(n) = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j (n+j)! + (2n)! = \sum_{j=0}^{n-1} a_j (n+j)! + (2n)! = (f_n - h \mid f_n).$$

Ainsi $m = n!\,P(n) = (n!)^2$.

$$m = \inf_{(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \Big(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k\Big)^2 e^{-x}\,dx = (n!)^2.$$