EDHEC 2012 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

EXERCICE 1

---

1) a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2A^2.$

$$\boxed{A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2A^2.}$$

Alors $A^3 - 2A^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Donc $f^3 - 2f^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. Dans ces conditions :

$$\boxed{X^3 - 2X^2 \text{ est un polynôme annulateur de } f.}$$

b) $X^3 - 2X^2$ est un polynôme annulateur de f dont les racines sont 0 et 2.

Alors les seules valeurs propres possibles de f sont 0 et 2. $\operatorname{Sp} f \subset \{0, 2\}$.

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit u un élément de $\mathbb{R}^3$ dont la famille des coordonnées dans la base $\mathcal{B}_0$ est (x, y, z).

$f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 3y - 3z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}.$

$f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4(y - z) = 0 \\ 4(y - z) = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \right).$

$f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}.$

Plus de doute 0 est valeur propre de f et le sous espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $(e_2 + e_3)$.

$f(u) = 2u \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y - z = 2x \\ -x + 3y - 3z = 2y \\ -2x + 2y - 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \\ -2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}.$

$f(u) = 2u \iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -2z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \right).$

$f(u) = 2u \iff \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}.$

2 est valeur propre de f et le sous espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $(e_1 + e_2)$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } f \text{ sont 0 et 2. De plus SEP } (f, 0) = \operatorname{Vect}(e_2 + e_3) \text{ et SEP } (f, 2) = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2).}$$

c) $\mathrm{Sp}\, f = \{0,2\}$ et $\dim \mathrm{SEP}\ (f,0) + \dim \mathrm{SEP}\ (f,2) = 1+1 = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

2) • Une petite **analyse** s'impose.

Supposons que $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2, e'_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Alors $f(e'_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $f(e'_2) = e'_1$ et $f(e'_3) = 2e'_3$. $e'_1 \in \mathrm{Ker}\, f$, $e'_1 = f(e'_2)$ et $e'_3 \in \mathrm{SEP}\ (f,2)$.

Notons que $e'_1 \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$.

$\mathrm{Im}\, f = f(\mathbb{R}^3) = f\left(\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)\right) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\right) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 - 2e_3, e_1 + 3e_2 + 2e_3, -e_1 - 3e_2 - 2e_3)$.

$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 - 2e_3, e_1 + 3e_2 + 2e_3) = \mathrm{Vect}\Big(e_1 - e_2 - 2e_3, e_1 + 3e_2 + 2e_3 - (e_1 - e_2 - 2e_3)\Big)$.

$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 - 2e_3, 4e_2 + 4e_3) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 - 2e_3, e_2 + e_3) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 - 2e_3 + e_2 + e_3, e_2 + e_3)$.

$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3, e_2 + e_3)$.

Alors $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Im}\, f$ donc $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3)$. Rappelons que $\mathrm{SEP}\ (f,2) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$.

• Passons à la **synthèse**. Donc construisons une base $\mathcal{B}$ solution.

Posons $\underline{e'_1 = e_2 + e_3}$ et $\underline{e'_3 = e_1 + e_2}$. Alors $\underline{f(e'_1) = 0_{\mathbb{R}^3}}$ et $\underline{f(e'_3) = 2e'_3}$.

Construisons alors un élément e'_2 de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(e'_2) = e'_1$. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

$$f(u) = e'_1 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 3y - 3z = 1 \\ -2x + 2y - 2z = 1 \end{cases}.$$

$$f(u) = e'_1 \iff \begin{cases} x = z - y \\ 4y - 4z = 1 \\ 4y - 4z = 1 \end{cases} \quad \left(\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \right).$$

$$f(u) = e'_1 \iff \begin{cases} y - z = \dfrac{1}{4} \\ x = -\dfrac{1}{4} \end{cases}.$$ Notons que le triplet $(-1/4, 1/4, 0)$ est solution de ce système.

Posons alors $\underline{e'_2 = -\dfrac{1}{4}e_1 + \dfrac{1}{4}e_2}$. On a $\underline{f(e'_2) = e'_1}$.

Posons encore $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2, e'_3)$ et montrons que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Cette famille étant de cardinal 3 égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$ il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soient α, β, γ trois réels tels que $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$\alpha(e_2 + e_3) + \beta\left(-\dfrac{1}{4}e_1 + \dfrac{1}{4}e_2\right) + \gamma(e_1 + e_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Donc $\left(-\dfrac{\beta}{4} + \gamma\right)e_1 + \left(\alpha + \dfrac{\beta}{4} + \gamma\right)e_2 + \alpha e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Comme (e_1, e_2, e_3) est libre il vient : $-\dfrac{\beta}{4} + \gamma = \alpha + \dfrac{\beta}{4} + \gamma = \alpha = 0$. Donc $\alpha = 0$ et $\gamma = \dfrac{\beta}{4} = -\dfrac{\beta}{4}$.

Ceci donne rapidement $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et achève de montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Rappelons que $f(e'_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $f(e'_2) = e'_1$ et $f(e'_3) = 2e'_3$. Ainsi la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est : $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\mathcal{B} = (e_2+e_3, -\frac{1}{4}e_1+\frac{1}{4}e_2, e_1+e_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ et la matrice de } f \text{ dans cette base est } T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

♣ *Exercice* *Calculer l'inverse de la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2, e'_3)$.*

Réponse : $P = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1 \\ 1 & 1/4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

3) a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\operatorname{rg} A^2 = 1$ (le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A^2 est de dimension 1).

Donc le rang de f^2 est également 1 et le théorème du rang montre alors que $\operatorname{Ker} f^2$ est de dimension 2.

$e'_1 \in \operatorname{Ker} f$ donc $e'_1 \in \operatorname{Ker} f^2$. $f^2(e'2) = f(e'_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, donc e'_2 est également un élément de $\operatorname{Ker} f^2$.

(e'_1, e'_2) est une famille libre (comme sous-famille de la base (e'_1, e'_2, e'_3)) de cardinal 2 d'éléments de $\operatorname{Ker} f^2$ qui est de dimension 2. Alors (e'_1, e'_2) est une base de $\operatorname{Ker} f^2$.

e'_3 est un élément non nul de $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qui est une droite vectorielle. Alors (e'_3) est une base de $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

(e'_1, e'_2) est une base de $\operatorname{Ker} f^2$, (e'_3) est une base de $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et la concaténée (e'_1, e'_2, e'_3) de ces deux familles est une base de $\mathbb{R}^3$. Alors $\operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ sont supplémentaires.

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}).}$$

b) Soit u un élément de $\operatorname{Ker} f^2$. Montrons que $g(u)$ appartient à $\operatorname{Ker} f^2$.

$f^2(g(u)) = g^4\big(g(u)\big) = g^5(u) = g\big(g^4(u)\big) = g\big(f^2(u)\big) = g(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$; $g(u) \in \operatorname{Ker} f^2$.

$\forall u \in \operatorname{Ker} f^2, g(u) \in \operatorname{Ker} f^2$. Alors :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f^2 \text{ est stable par } g.}$$

Nous avons vu que (e'_1, e'_2) est une base de $ker f^2$ et que $ker f^2$ est stable par g.

Alors $g(e'_1) \in \operatorname{Vect}(e'_1, e'_2)$ et $g(e'_2) \in \operatorname{Vect}(e'_1, e'_2)$. Ainsi il existe quatre réels a, b, a', b' tels que $g(e'_1) = ae'_1 + be'_2$ et $g(e'_2) = a'e'_1 + b'e'_2$.

De plus il existe un triplet (a'', b'', c'') de réels tel que $g(e'_3) = a''e'_1 + b''e'_2 + c''e'_3$.

Alors la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est $G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{La matrice de } g \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est de la forme } G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.}$$

Remarque *Il était facile d'arriver à* $G = \begin{pmatrix} 0 & a' & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$ *(avec $c''^2 = 2$) en remarquant que g et f commutent donc que les sous-espaces propres de f, qui sont des droites vectorielles, sont stables par g...*

$g^2 = f$ donc $G^2 = T$. $\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Cela donne en particulier $\begin{cases} a^2 + a'b = 0 \\ ba + b'b = 0 \\ aa' + a'b' = 1 \\ ba' + b'^2 = 0 \end{cases}$. Alors $\begin{cases} a^2 + a'b = 0 & (1) \\ b(a + b') = 0 & (2) \\ a'(a + b') = 1 & (3) \\ ba' + b'^2 = 0 & (4) \end{cases}$.

(3) montre que $a + b'$ n'est pas nul. (2) donne alors $b = 0$. (1) donne $a = 0$ et (4) donne $b' = 0$. Alors $a + b'$ est nul ! !

Ce qui engendre une légère contradiction...

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } g \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ vérifiant} : g^2 = f.}$$

4) a) Étude d'un cas général (sic). Ici h est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $h^n = \alpha\, h^{n-1}$.

On se propose de montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} h^{n-1} \oplus \operatorname{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$. Soit u un élément de $\mathbb{R}^3$.

Montrons par "Analyse-Synthèse" que : $\exists\,!\,(v, w) \in \operatorname{Ker} h^{n-1} \times \operatorname{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}),\ u = v + w$.

- "Analyse-Unicité".

Supposons qu'il existe $(v, w) \in \operatorname{Ker} h^{n-1} \times \operatorname{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ tel que $u = v + w$.

Alors $h^{n-1}(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $h(w) = \alpha\, w$. Donc $h^{n-1}(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $h^{n-1}(w) = \alpha^{n-1}\, w$.

Dans ces conditions $h^{n-1}(u) = h^{n-1}(v) + h^{n-1}(w) = \alpha^{n-1}\, w$.

α n'étant pas nul il vient $w = \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\, h^{n-1}(u)$ puis $v = u - \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\, h^{n-1}(u)$.

Ceci montre alors l'unicité d'un couple (v, w) appartenant à $\operatorname{Ker} h^{n-1} \times \operatorname{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ tel que $u = v + w$.

- "Synthèse-Existence".

Posons $v = u - \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\, h^{n-1}(u)$ et $w = \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\, h^{n-1}(u)$.

D'abord $v + w = u$.

$h(w) = h\left(\dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\, h^{n-1}(u)\right) = \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\, h^n(u) = \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\, \alpha\, h^{n-1}(u)$ car $h^n = \alpha\, h^{n-1}$.

$h(w) = \alpha\, \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\, h^{n-1}(u) = \alpha\, w$. Donc w appartient à $\operatorname{Ker}(f - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$. Notons alors que $h^{n-1}(w) = \alpha^{n-1}\, w$.

$v = u - w$ alors : $h^{n-1}(v) = h^{n-1}(u) - h^{n-1}(w) = h^{n-1}(u) - \alpha^{n-1}\, w = h^{n-1}(u) - \alpha^{n-1}\, \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\, h^{n-1}(u)$.

$h^{n-1}(v) = h^{n-1}(u) - h^{n-1}(u) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc $v \in \operatorname{Ker} h^{n-1}$.

Donc $u = v + w$ avec $(v, w) \in \operatorname{Ker} h^{n-1} \times \operatorname{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

Ceci achève de montrer l'existence d'un couple (v, w) appartenant à $\operatorname{Ker} h^{n-1} \times \operatorname{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ tel que $u = v + w$.

Finalement $\forall u \in \mathbb{R}^n,\ \exists\,!\,(v, w) \in \operatorname{Ker} h^{n-1} \times \operatorname{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}),\ u = v + w$.

$\operatorname{Ker} h^{n-1}$ et $\operatorname{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ sont supplémentaires.

$$\boxed{\text{Si } h \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^n \text{ tel que } h^n = \alpha\, h^{n-1} \text{ alors } \mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} h^{n-1} \oplus \operatorname{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}).}$$

b) Ici h est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} h^{n-1} \oplus \operatorname{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

On se propose de montrer que $h^n = \alpha\, h^{n-1}$.

Soit u un élément de $\mathbb{R}^n$. $\exists\,!\,(v, w) \in \operatorname{Ker} h^{n-1} \times \operatorname{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}),\ u = v + w$. $h^{n-1}(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $h(w) = \alpha\, w$.

Alors : $h^n(u) = h^n(v) + h^n(w) = h\big(h^{n-1}(v)\big) + \alpha^n w = h(0_{\mathbb{R}^n}) + \alpha^n w = \alpha^n w$.

De plus $\alpha\, h^{n-1}(u) = \alpha\, h^{n-1}(v) + \alpha\, h^{n-1}(w) = \alpha\, 0_{\mathbb{R}^n} + \alpha\ \alpha^{n-1}\, w = \alpha^n\, w$.

Finalement $\forall u \in \mathbb{R}^n,\ h^n(u) = \alpha\, h^{n-1}(u)$. Donc $h^n = \alpha\, h^{n-1}$.

$$\boxed{\text{Si } h \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^n \text{ tel que } \mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} h^{n-1} \oplus \operatorname{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \text{ alors } h^n = \alpha\, h^{n-1}.}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Soit } h \text{ un endomorphisme de } \mathbb{R}^n.\ h^n = \alpha\, h^{n-1} \text{ si et seulement si } \mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} h^{n-1} \oplus \operatorname{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}).}$$

EXERCICE 2

1) a) Soit x un réel strictement positif. Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

X_0 est une variable aléatoire à densité de densité φ.

Le cours (?) montre alors que $-x\, X_0$ est une variable aléatoire à densité de densité $\psi_x : t \to \dfrac{1}{|-x|}\, \varphi\left(\dfrac{t-0}{-x}\right)$.

$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi_x(t) = \dfrac{1}{x}\, \varphi\left(-\dfrac{t}{x}\right)$. Donc : $\forall t \in \mathbb{R},\ \psi_x(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x}\, e^{\frac{\lambda}{x}\, t} & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

> Pour tout réel x strictement positif, $-x\, X_0$ est une variable aléatoire à densité de densité ψ_x définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ \psi_x(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x}\, e^{\frac{\lambda}{x}\, t} & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

b) Soit x un réel strictement positif.

- X_1 et $-x\, X_0$ sont deux variables aléatoires à densité de densités respectives φ et ψ_x.
- X_1 et X_0 sont indépendantes donc X_1 et $-x\, X_0$ sont indépendantes.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \lambda$ donc φ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de convolution (ou son corollaire...) permet de dire que $X_1 - x\, X_0$ est une variable aléatoire à densité et que $\widetilde{f} : z \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z-t)\, \psi_x(t)\, \mathrm{d}t$ (ou $\widetilde{f} : z \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, \psi_x(z-t)\, \mathrm{d}t$) en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Remarque *Nous ne pouvons pas encore l'appeler f dans la mesure où $X_1 - x\, X_0$ n'admet pas qu'une densité.*

Soit z un réel. $\widetilde{f}(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z-t)\, \psi_x(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \varphi(z-t)\, \frac{\lambda}{x}\, e^{\frac{\lambda}{x}\, t}\, \mathrm{d}t$.

$t \to z - t$ définit une bijection strictement décroissante de $]-\infty, 0[$ sur $]z, +\infty[$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Ceci justifie le changement de variable $u = z - t$ dans ce qui suit.

$$\widetilde{f}(z) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(z-t)\, \frac{\lambda}{x}\, e^{\frac{\lambda}{x}\, t}\, \mathrm{d}t = \frac{\lambda}{x} \int_{z}^{+\infty} \varphi(u)\, e^{\frac{\lambda}{x}(z-u)}\, \mathrm{d}u = \frac{\lambda}{x} \int_{\mathrm{Max}\{0,z\}}^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda\, u}\, e^{\frac{\lambda}{x}(z-u)}\, \mathrm{d}u.$$

$$\widetilde{f}(z) = \frac{\lambda^2}{x}\, e^{\frac{\lambda}{x}\, z} \int_{\mathrm{Max}\{0,z\}}^{+\infty} e^{-\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right) u}\, \mathrm{d}u = \frac{\lambda}{x+1}\, e^{\frac{\lambda}{x}\, z} \int_{\mathrm{Max}\{0,z\}}^{+\infty} \lambda\, \frac{x+1}{x}\, e^{-\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right) u}\, \mathrm{d}u.$$

Notons que $\lambda\, \dfrac{x+1}{x}$ est un réel strictement positif.

Soit alors F_W la fonction de répartition d'une variable aléatoire W qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda\, \dfrac{x+1}{x}$.

$$\int_{\mathrm{Max}\{0,z\}}^{+\infty} \lambda\, \frac{x+1}{x}\, e^{-\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right) u}\, \mathrm{d}u = P(W > \mathrm{Max}\{0,z\}) = 1 - P(W \leqslant \mathrm{Max}\{0,z\})) = e^{-\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right) \mathrm{Max}\{0,z\}}.$$

Donc $\widetilde{f}(z) = \dfrac{\lambda}{x+1}\, e^{\frac{\lambda}{x}\, z} \displaystyle\int_{\mathrm{Max}\{0,z\}}^{+\infty} \lambda\, \frac{x+1}{x}\, e^{-\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right) u}\, \mathrm{d}u = \frac{\lambda}{x+1}\, e^{\frac{\lambda}{x}\, z}\, e^{-\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right)\, \mathrm{Max}\{0,z\}}$.

Si z est strictement négatif alors $\widetilde{f}(z) = \dfrac{\lambda}{x+1}\, e^{\frac{\lambda}{x}\, z}$. Si z est positif ou nul : $\widetilde{f}(z) = \dfrac{\lambda}{x+1}\, e^{\frac{\lambda}{x}\, z}\, e^{-\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right) z} = \dfrac{\lambda}{x+1}\, e^{-\lambda\, z}$.

$\forall z \in \mathbb{R},\ \widetilde{f}(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x+1}\, e^{\frac{\lambda}{x}\, z} & \text{si } z \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{\lambda}{x+1}\, e^{-\lambda\, z} & \text{si } z \in [0, +\infty[\end{cases}$. Nous pouvons maintenant dire que :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout réel strictement positif } x,\ X_1 - x\, X_0 \text{ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité} \\ \text{la fonction } f \text{ définie par : } \forall z \in \mathbb{R},\ f(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x+1}\, e^{\frac{\lambda}{x}\, z} & \text{si } z \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{\lambda}{x+1}\, e^{-\lambda\, z} & \text{si } z \in [0, +\infty[\end{cases}.\end{array}}$$

c) X_1 et X_0 prennent presque sûrement des valeurs strictement positives donc $T = \dfrac{X_1}{X_0}$ prend presque sûrement des valeurs strictement positives. Alors :

$\forall x \in]-\infty, 0],\ F_T(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ F_T(x) = P\left(\dfrac{X_1}{X_0} \leqslant x\right) = P(X_1 \leqslant x\, X_0) = P(X_1 - x\, X_0 \leqslant 0)$.

Sot x un élément de $]0, +\infty[$. $F_T(x) = P(X_1 - x\, X_0 \leqslant 0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{x+1}\, e^{\frac{\lambda}{x}\, t}\, \mathrm{d}t = \frac{x}{x+1} \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{x}\, e^{\frac{\lambda}{x}\, t}\, \mathrm{d}t$.

$F_T(x) = P(X_1 - x\, X_0 \leqslant 0) = \dfrac{x}{x+1} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \psi_x(t)\, \mathrm{d}t = \frac{x}{x+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_x(t)\, \mathrm{d}t = \frac{x}{x+1} \times 1 = \frac{x}{x+1}$ car ψ_x est une densité de probabilité nulle sur $]0, +\infty[$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}$.

Notons que l'on a encore : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}$ car $F_t(0) = 0 = \dfrac{0}{0+1}\cdot$ Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}.}$$

Montrons que T est une variable aléatoire à densité ce qui sera utile dans la question suivante.

Observons que $\forall x \in]-\infty, 0],\ F_T(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ F_T(x) = \dfrac{x}{x+1}\cdot$

Comme $x \to 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$ et que $x \to \dfrac{x}{x+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$.

Cela suffit pour dire que F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Ainsi :

$$\boxed{T \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

2) $X = \lfloor T \rfloor + 1$ prend presque sûrement ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = P(\lfloor T \rfloor + 1 = n) = P(\lfloor T \rfloor = n - 1) = P(n - 1 \leqslant T < n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = P(n - 1 < T \leqslant n)$ car T est une variable aléatoire à densité.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = F_T(n) - F_T(n-1) = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{n^2 - (n+1)(n-1)}{n(n+1)} = \dfrac{n^2 - (n^2 - 1)}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)}\cdot$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = \frac{1}{n(n+1)}.}$$

3) On admettra seulement que, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, Y_n est une variable aléatoire.

a) D'après **1) a)** $-X_0$ est une variable aléatoire à densité de densité ψ_1.

$$\boxed{\begin{array}{l} -X_0 \text{ est une variable aléatoire à densité de densité } \psi_1 \text{ définie par} \\ \forall t \in \mathbb{R},\ \psi_1(t) = \begin{cases} \lambda\, e^{\lambda\, t} & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{array}}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit x dans $\mathbb{R}$.

$G_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P\big(\mathrm{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant x\big) = P\left(\{X_1 \leqslant x\} \cap \{X_2 \leqslant x\} \cap \ldots \cap \{X_n \leqslant x\}\right).$

X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes et suivent toutes la loi exponentielle de paramètre λ. On a alors :

$G_n(x) = P(X_1 \leqslant x)\, P(X_2 \leqslant x) \ldots P(X_n \leqslant x) = \big(P(X_1 \leqslant x)\big)^n = \begin{cases} (1-e^{-\lambda\, x})^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \begin{cases} (1-e^{-\lambda\, x})^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

On a $\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \begin{cases} (1-e^{-\lambda\, x})^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}.$

Mais remarquons que l'on a aussi $\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \begin{cases} (1-e^{-\lambda\, x})^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}.$

$x \to 0$ et $x \to (1-e^{-\lambda\, x})^n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc G_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$.

Ceci suffit pour dire que G_n est continue sur la totalité de $\mathbb{R}$ et au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Alors :

$$\boxed{Y_n \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ G'_n(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ G'_n(x) = n\,\lambda\, e^{-\lambda\, x}\,(1-e^{-\lambda x})^{n-1}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \begin{cases} n\,\lambda\, e^{-\lambda\, x}\,(1-e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

g_n est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec G'_n sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Alors g_n est une densité de Y_n.

$$\boxed{\text{La fonction } g_n \text{ définie par } \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \begin{cases} n\,\lambda\, e^{-\lambda\, x}\,(1-e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ est une densité de } Y_n.}$$

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

- Y_n et $-X_0$ sont deux variables aléatoires à densité de densités respectives g_n et ψ_1.
- X_1, X_2, ..., X_n, X_0 sont indépendantes donc $\mathrm{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et X_0 sont indépendantes. Alors Y_n et X_0 sont indépendantes.

- $\forall t \in \mathbb{R},\ \psi_1(t) = \begin{cases} \lambda\, e^{\lambda t} & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \psi_1(t) \leqslant \lambda$ donc ψ_1 est bornée.

Ici encore nous pouvons dire que $Y_n - X_0$ est une variable aléatoire à densité et que $\widetilde{h}_n : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x-t)\, \psi_1(t)\, \mathrm{d}t$ ou $\widetilde{h}_n : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\, \psi_1(x-t)\, \mathrm{d}t$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Soit x un élément de $]-\infty, 0[$. $\forall t \in \mathbb{R},\ \psi_1(x-t) = \begin{cases} \lambda\, e^{\lambda\,(x-t)} & \text{si } t \in [x, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $\tilde{h}_n(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\, \psi_1(x-t)\, \mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} g_n(t)\, \left(\lambda\, e^{\lambda(x-t)}\right) \mathrm{d}t$.

$\tilde{h}_n(x) = \lambda\, e^{\lambda\, x} \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\, \mathrm{d}t$ car g_n est nulle sur $]-\infty, 0[$ et x est strictement négatif.

Calculons $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\, \mathrm{d}t$.

Version 1 $\quad \forall t \in [0, +\infty[,\ g_n(t)\, e^{-\lambda\, t} = g_n(t)\left(e^{-\lambda\, t} - 1 + 1\right) = -g_n(t)\,(1 - e^{-\lambda\, t}) + g_n(t)$.

$\forall t \in [0, +\infty[,\ g_n(t)\, e^{-\lambda\, t} = g_n(t) - (1 - e^{-\lambda\, t})\, g_n(t) = g_n(t) - (1 - e^{-\lambda\, t})\, n\, \lambda\, e^{-\lambda\, t}\, (1 - e^{-\lambda\, t})^{n-1}$.

$\forall t \in [0, +\infty[,\ g_n(t)\, e^{-\lambda\, t} = g_n(t) - \dfrac{n}{n+1}\,(n+1)\, \lambda\, e^{-\lambda\, t}\, (1 - e^{-\lambda\, t})^n = g_n(t) - \dfrac{n}{n+1}\, g_{n+1}(t)$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)\, \mathrm{d}t$ existent et valent 1.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g_n(t)\, \mathrm{d}t - \frac{n}{n+1} \int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)\, \mathrm{d}t = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.

Version 2 $\quad$ Calculons $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\, \mathrm{d}t$ en intégrant par parties.

Soit L_n la restriction de G_n à $[0, +\infty[$. L_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $\forall t \in [0, +\infty[,\ L'_n(t) = g_n(t)$.

Remarque $\quad$ *Notons que nous ne pouvons pas toujours écrire* $\forall t \in [0, +\infty[,\ G'_n(t) = g_n(t)$... *dans la cas où* $n = 1$ *par exemple.*

De plus $t \to e^{-\lambda\, t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Soit A un réel strictement positif.

$\displaystyle\int_0^A g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\, \mathrm{d}t = \Big[L_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\Big]_0^A - \int_0^A L_n(t)\, (-\lambda\, e^{-\lambda\, t})\, \mathrm{d}t = \Big[e^{-\lambda\, t}\, G_n(t)\Big]_0^A + \int_0^A G_n(t)\, (\lambda\, e^{-\lambda\, t})\, \mathrm{d}t$.

$\displaystyle\int_0^A g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\, \mathrm{d}t = e^{-\lambda\, A}\, G_n(A) - G_n(0) + \int_0^A \lambda\, e^{\lambda\, t}\, (1 - e^{-\lambda t})^n\, \mathrm{d}t = e^{-\lambda\, A}\, G_n(A) - G_n(0) + \left[\frac{(1 - e^{-\lambda\, t})^{n+1}}{n+1}\right]_0^A$.

$\displaystyle\int_0^A g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\, \mathrm{d}t = e^{-\lambda\, A}\, G_n(A) - G_n(0) + \frac{1}{n+1}\, (1 - e^{-\lambda\, A})^{n+1}$.

$G_n(0) = 0,\ \displaystyle\lim_{A \to +\infty} e^{-\lambda\, A} = 0,\ \lim_{A \to +\infty} G_n(A) = 1$ et $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} (1 - e^{-\lambda\, A})^{n+1} = 1$.

Alors $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$. Ainsi nous retrouvons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\, e^{-\lambda\, t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.

Finalement : $\tilde{h}_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\, \lambda\, e^{\lambda\, x}$ et ceci pour tout réel x strictement négatif.

Ne reste plus qu' à poser $h_n = \tilde{h}_n$ pour dire que :

$$\boxed{Y_n - X_0 \text{ est une variable aléatoire à densité qui possède une densité } h_n \text{ telle que : } \forall x \in]-\infty, 0[,\ h_n(x) = \frac{1}{n+1}\,\lambda\, e^{\lambda x}.}$$

Remarque *Calculer $\tilde{h}_n(x)$ pour tout réel x positif ou nul.*

4) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

L'événement $\{Z > n\} \cup \{Z = 0\}$ se réalise si et seulement si les n événements $\{X_1 \leqslant X_0\}$, $\{X_2 \leqslant X_0\}$, ..., $\{X_n \leqslant X_0\}$ se réalisent. Alors :

$\{Z > n\} \cup \{Z = 0\} = \{X_1 \leqslant X_0\} \cap \{X_2 \leqslant X_0\} \cap \ldots \cap \{X_n \leqslant X_0\} = \{\mathrm{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant X_0\} = \{Y_n \leqslant X_0\}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^* : \{Z > n\} \cup \{Z = 0\} = \{Y_n \leqslant X_0\}.}$$

b) $\{Z = 0\}$ se réalise si et seulement si pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ $\{X_k > X_0\}$ n'est pas réalisé.

$\{Z = 0\}$ se réalise si et seulement si pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ l'événement $\{X_k \leqslant X_0\}$ est réalisé. On peut encore dire que $\{Z = 0\}$ se réalise si et seulement si pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ l'événement $\{X_1 \leqslant X_0\} \cap \{X_2 \leqslant X_0\} \cap \ldots \cap \{X_k \leqslant X_0\}$ est réalisé. Alors :

$$\{Z = 0\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \Big(\{X_1 \leqslant X_0\} \cap \{X_2 \leqslant X_0\} \cap \ldots \cap \{X_k \leqslant X_0\}\Big) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \{\, \mathrm{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_k) \leqslant X_0\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \{Y_k \leqslant X_0\}.$$

$$\boxed{\{Z = 0\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \{Y_k \leqslant X_0\}.}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \{X_1 \leqslant X_0\} \cap \{X_2 \leqslant X_0\} \cap \ldots \cap \{X_k \leqslant X_0\} \cap \{X_{k+1} \leqslant X_0\} \subset \{X_1 \leqslant X_0\} \cap \{X_2 \leqslant X_0\} \cap \ldots \cap \{X_k \leqslant X_0\}$.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \{Y_{k+1} \leqslant X_0\} \subset \{Y_k \leqslant X_0\}$. La suite $\big(\{Y_k \leqslant X_0\}\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Le théorème de la limite monotone montre alors que : $P(Z = 0) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \{Y_k \leqslant X_0\}\right) = \lim_{k \to +\infty} P(Y_k \leqslant X_0)$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_k \leqslant X_0) = P(Y_k - X_0 \leqslant 0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} h_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1} \int_{-\infty}^{0} \lambda\, e^{\lambda\, t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1} \int_{-\infty}^{0} \psi_1(t)\,\mathrm{d}t.$

Rappelons que ψ_1 est une densité de probabilité nulle sur $]0, +\infty[$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_k \leqslant X_0) = \dfrac{1}{k+1} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1} \times 1 = \frac{1}{k+1}\cdot$

Alors $P(Z = 0) = \lim_{k \to +\infty} P(Y_k \leqslant X_0) = \lim_{k \to +\infty} \dfrac{1}{k+1} = 0$.

$$\boxed{P(Z = 0) = 0.}$$

c) Par incompatibilité : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P\big(\{Z > n\} \cap \{Z = 0\}\big) = P(Z > n) + P(Z = 0)$.

Comme $P(Z = 0) = 0$ il vient : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(\{Z > n\} \cap \{Z = 0\} = P(Z > n)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z > n) = P\big(\{Z > n\} \cap \{Z = 0\}\big) = P(Y_n \leqslant X_0) = \dfrac{1}{n+1}$ (comme nous l'avons vu dans b)).

$P(Z > 0) = 1 - P(Z \leqslant 0) = 1 - P(Z = 0) = 1 - 0 = 1 = \dfrac{1}{0+1}\cdot$ Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ P(Z > n) = \dfrac{1}{n+1}\cdot$ Alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z = n) = P(Z > n-1) - P(Z > n) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} = P(X = n).$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul, les événements } \{X = n\} \text{ et } \{Z = n\} \text{ ont même probabilité.}}$$

5) a) U prend ses valeurs dans $[0,1[$ donc $1-U$ prend ses valeurs dans $]0,1]$.

Alors $\ln(1-U)$ prend ses valeurs dans $]-\infty,0]$ et $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$.

Notons F_V la fonction de répartition de V. D'après ce qui précède , $\forall x \in]-\infty,0[,\ F_V(x)=0$.

Soit x un élément de $[0,+\infty[$. $F_V(x) = P(V \leqslant x) = P\left(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant x\right) = P(\ln(1-U) \geqslant -\lambda\, x)$.

$F_V(x) = P(1-U \geqslant e^{-\lambda\, x}) = P(U \leqslant 1 - e^{-\lambda\, x})$. Or x appartient à $[0,+\infty[$ donc $1-e^{-\lambda\, x}$ appartient à $[0,1[$.

Comme U suit la loi exponentielle sur $[0,1[$: $\forall z \in \mathbb{R},\ P(U \leqslant z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in]-\infty,0[\\ z & \text{si } z \in [0,1[\\ 1 & \text{si } z \in [1,+\infty[\end{cases}$.

Alors $F_V(x) = P(U \leqslant 1-e^{-\lambda\, x}) = 1-e^{-\lambda\, x}$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_V(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda\, x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

La fonction de répartition F_V de la variable aléatoire $V = \dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ est définie par

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_V(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda\, x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$$\boxed{V \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \lambda.}$$

b) Deux versions sont possibles. L'une simulant Z l'autre simulant X en passant par T.

L'en-tête de la fonction élimine presque la version simulant directement Z car elle ne contient pas λ.

Mais peut-on lui faire confiance dans la mesure où elle contient " Z : real " ?!

Version simulant Z en passant par X.

Dans cette version on simule deux fois la loi exponentielle de paramètre λ en s'appuyant sur **a)**, on fait le quotient des deux résultats, on calcule la partie entière et on ajoute 1.

Soient U et U' deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0,1[$.

$-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ et $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U')$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi exponentielle

de paramètre λ. Donc $\dfrac{-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)}{-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U')}$ a même loi que T.

Or $\dfrac{-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)}{-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U')} = \dfrac{\ln(1-U)}{\ln(1-U')}$ donc $\dfrac{\ln(1-U)}{\ln(1-U')}$ a même loi que T.

Ainsi : $\left\lfloor \dfrac{\ln(1-U)}{\ln(1-U')} \right\rfloor + 1$ a même loi que X et Z.

```
function Z:integer;
begin
Z:=trunc(ln(1-random)/ln(1-random))+1;
end;
```

Version simulant directement Z

Elle s'appuie sur la définition de Z. Si k appartient à $\mathbb{N}^*$, Z prend la valeur k si et seulement si k est le plus petit entier tel que $\{X_k > X_0\}$ soit réalisé.

```
function Z(lambda:real):integer;

var n:integer;X0:real;

Begin

n:=0;X0:=-ln(1-random)/lambda;

repeat
n:=n+1;
until(-ln(1-random)/lambda>X0);

Z:=n;
end;
```

EXERCICE 3

Commençons par rappeler le théorème de la division euclidienne.

Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. On suppose B non nul.

Alors il existe un unique couple (Q, R) d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.

Q est le quotient dans la division euclidienne de A par B et R le reste.

1) • Soit P un élément de E. $f(P)$ est le reste dans la division euclidienne de $(1 - X + X^2)\, P$ par $1 + X^3$ donc $f(P)$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré strictement inférieur au degré de $1 + X^3$ donc de degré strictement inférieur à trois.

Alors $f(P)$ est un élément de $\mathbb{R}_2[X]$ donc de E.

f est une application de E dans E.

• Soit λ un réel. Soient P_1 et P_2 deux éléments de E.

Il existe deux éléments $Q1$ et $Q2$ de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $(1 - X + X^2)\, P_1 = (1 + X^3)\, Q_1 + f(P_1)$ et $(1 - X + X^2)\, P_2 = (1 + X^3)\, Q_2 + f(P_2)$.

Alors $(1 - X + X^2)\, (\lambda\, P_1 + P_2) = (1 + X^3)\, (\lambda\, Q_1 + Q_2) + \lambda\, f(P_1) + f(P_2)$.

Or $f(P_1)$ et $f(P_2)$ sont deux éléments de E donc $\lambda\, f(P_1) + f(P_2)$ est un élément de E.

Alors $\deg \big(\lambda\, f(P_1) + f(P_2)\big) \leqslant 2 < \deg(1 + X^3)$.

Finalement $(1 - X + X^2)\, (\lambda\, P_1 + P_2) = (1 + X^3)\, (\lambda\, Q_1 + Q_2) + \lambda\, f(P_1) + f(P_2)$ et $\deg \big(\lambda\, f(P_1) + f(P_2)\big) < \deg(1 + X^3)$.

Ainsi $\lambda\, f(P_1) + f(P_2)$ est LE reste dans la division euclidienne de $(1 - X + X^2)\, (\lambda\, P_1 + P_2)$ par $1 + X^3$.

Par conséquent $f(\lambda\, P_1 + P_2) = \lambda\, f(P_1) + f(P_2)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P_1, P_2) \in E^2,\ f(\lambda\, P_1 + P_2) = \lambda\, f(P_1) + f(P_2)$. f est linéaire. Ce qui achève de montrer que :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

2) a) $(1 - X + X^2)\, e_0 = 1 - X + X^2 = (1 + X^3) \times 0_{\mathbb{R}[X]} + (1 - X + X^2)$ et $\deg(1 - X + X^2) < \deg(1 + X^3)$.

Alors $1 - X + X^2$ est le reste dans la division euclidienne de $(1 - X + X^2)\, e_0$ par $1 + X^3$.

Donc $f(e_0) = 1 - X + X^2 = e_0 - e_1 + e_2$.

$(1 - X + X^2)\, e_1 = (1 - X + X^2)\, X = X - X^2 + X^3 = (1 + X^3) \times 1 - 1 + X - X^2$ et $\deg(-1 + X - X^2) < \deg(1 + X^3)$.

Alors $-1 + X - X^2$ est le reste dans la division euclidienne de $(1 - X + X^2)\, e_1$ par $1 + X^3$.

Donc $f(e_1) = -1 + X - X^2 = -e_0 + e_1 - e_2 = -f(e_0)$.

$(1 - X + X^2)\, e_2 = (1 - X + X^2)\, X^2 = X^2 - X^3 + X^4 = (1 + X^3) \times (-1 + X) + 1 - X + X^2$ et $\deg(1 - X + X^2) < \deg(1 + X^3)$.

Alors $1 - X + X^2$ est le reste dans la division euclidienne de $(1 - X + X^2)\, e_2$ par $1 + X^3$.

Donc $f(e_2) = 1 - X + X^2 = e_0 - e_1 + e_2 = f(e_0)$.

$$\boxed{f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2) = e_0 - e_1 + e_2 = 1 - X + X^2.}$$

b) $\operatorname{Im} f = f(E) = f\big(\operatorname{Vect}(e_0, e_1, e_2)\big) = \operatorname{Vect}\big(f(e_0), f(e_1), f(e_2)\big) = \operatorname{Vect}\big(f(e_0), -f(e_0), f(e_0)\big) = \operatorname{Vect}\big(f(e_0)\big)$.

$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e_0 - e_1 + e_2)$. Notons que $e_0 - e_1 + e_2 = 1 - X + X^2 \neq 0_E$. Alors :

$$\boxed{(e_0 - e_1 + e_2) \text{ (ou } (1 - X + X^2)) \text{ est une base de } \mathrm{Im}\, f.}$$

♣ *Exercice* *Retrouver ce résultat directement en remarquant que* $1 + X^3 = (1 + X)(1 - X + X^2)$.

c) Le théorème du rang donne : $\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim E - \dim \mathrm{Im}\, f = 3 - 1 = 2$.

$f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$. Donc $f(e_0 + e_1) = 0_E$ et $f(e_1 + e_2) = 0_E$.

$(e_0 + e_1, e_1 + e_2)$ est une famille d'éléments de $\mathrm{Ker}\, f$ de cardinal 2. Montrons que cette famille est libre.

Soient α et β deux réels tels que $\alpha\,(e_0 + e_1) + \beta\,(e_1 + e_2) = 0_E$. $\alpha\, e_0 + (\alpha + \beta)\, e_1 + \beta\, e_2 = 0_E$.

La liberté de la famille (e_0, e_1, e_2) donne $\alpha = \alpha + \beta = \beta = 0$ donc $\alpha = \beta = 0$.

Alors $(e_0 + e_1, e_1 + e_2)$ est une famille libre de cardinal 2 d'éléments de $\mathrm{Ker}\, f$ qui est de dimension 2. C'est donc une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

$$\boxed{(e_0 + e_1, e_1 + e_2) \text{ (ou } (1 + X, X + X^2)) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}\, f.}$$

♣ *Exercice* *Retrouver ce résultat directement en remarquant que* $1 + X^3 = (1 + X)(1 - X + X^2)$.

3) a) Soit P un élément de $\mathrm{Im}\, f$. Comme $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e_0 - e_1 + e_2)$ Il existe un réel α tel que $P = \alpha\,(e_0 - e_1 + e_2)$.

$f(P) = \alpha\,\big(f(e_0) - f(e_1) + f(e_2)\big) = \alpha\,\big(f(e_0) + f(e_0) + f(e_0)\big) = 3\,\alpha\, f(e_0) = 3\,\alpha\,(e_0 - e_1 + e_2)) = 3\,P$. $f(P) = 3\,P$.

$$\boxed{\forall P \in \mathrm{Im}\, f,\ f(P) = 3\,P.}$$

$\mathrm{Im}\, f$ est une droite vectorielle contenue dans $\mathrm{Ker}(f - 3\ \mathrm{Id}_E)$. Donc $\mathrm{Ker}(f - 3\ \mathrm{Id}_E)$ n'est pas réduit au vecteur nul. Ainsi :

$$\boxed{3 \text{ est valeur propre de } f.}$$

Nous venons de voir que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}(f - 3\ \mathrm{Id}_E)$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit $P \in \mathrm{Ker}(f - 3\ \mathrm{Id}_E)$. $f(P) = 3P$. Donc $P = f\left(\dfrac{1}{3}\,P\right)$. P est l'image pas f de $\dfrac{1}{3}\,P$ donc P appartient à $\mathrm{Im}\, f$. Ceci achève de montrer que $\mathrm{Ker}(f - 3\ \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}\, f$ et finalement :

$$\boxed{\mathrm{SEP}\ (f, 3) = \mathrm{Ker}(f - 3\ \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e_0 - e_1 + e_2).}$$

b) Rappelons que la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est inférieure où égale à la dimension de E qui vaut 3.

$\mathrm{Ker}\, f$ est de dimension 2 donc 0 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est de dimension 2.

Or 3 est valeur propre de f et le sous espace propre asssocié est de dimension 1 car c'est $\mathrm{Im}\, f$.

Dans ces conditions 0 et 3 sont les seules valeurs propres de f. De plus $\dim \mathrm{SEP}\ (f, 0) + \dim \mathrm{SEP}\ (f, 3) = 3 = \dim E$.

Alors :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

4) a) • Par définition φ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit λ un réel. Soient $P = \sum_{k=0}^{2} a_k\, X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{2} b_k\, X^k$ et $R = \sum_{k=0}^{2} c_k\, X^k$ trois éléments de E.

Notons que $\lambda\, P + Q = \sum_{k=0}^{2} (\lambda\, a_k + b_k)\, X^k$. Alors :

$$\varphi(\lambda\, P + Q, R) = \sum_{k=0}^{2} (\lambda\, a_k + b_k)\, c_k = \sum_{k=0}^{2} (\lambda\, a_k\, c_k + b_k\, c_k) = \lambda \sum_{k=0}^{2} a_k\, c_k + \sum_{k=0}^{2} b_k\, c_k = \lambda\, \varphi(P, R) + \varphi(Q, R).$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P, Q, R) \in E^3,\ \ \varphi(\lambda\, P + Q, R) = \lambda\, \varphi(P, R) + \varphi(Q, R).$

• Soient $P = \sum_{k=0}^{2} a_k\, X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{2} b_k\, X^k$ deux éléments de E. $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2} a_k\, b_k = \sum_{k=0}^{2} b_k\, a_k = \varphi(Q, P)$.

$\forall (P, Q) \in E^2,\ \ \varphi(P, Q) = \varphi(Q, P).$

• Soit $P = \sum_{k=0}^{2} a_k\, X^k$ un élément de E. $\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^{2} a_k^2 \geqslant 0$.

$\forall P \in E,\ \ \varphi(P, P) \geqslant 0.$

• Soit $P = \sum_{k=0}^{2} a_k\, X^k$ un élément de E tel que $\varphi(P, P) = 0$.

Alors $\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^{2} a_k^2 = 0$. Donc $a_0^2 = a_1^2 = a_2^2 = 0$ car a_0^2, a_1^2 et a_2^2 sont des réels positifs ou nuls.

Ainsi $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ et P est alors nul.

$\forall P \in E,\ \ \varphi(P, P) = 0 \Rightarrow P = 0_E.$

Les cinq points précédents suffisent pour dire que :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire défini sur } E.}$$

b) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(e_0 + e_1, e_1 + e_2)$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_0 - e_1 + e_2)$. De plus :

$\varphi(e_0 + e_1, e_0 - e_1 + e_2) = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 1 = 0$ et $\varphi(e_1 + e_2, e_0 - e_1 + e_2) = 0 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$.

Alors $e_0 - e_1 + e_2$ est orthogonal à $e_0 + e_1$ et $e_1 + e_2$. Cela suffit pour dire que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont orthogonaux.

Cela montre en particulier que leur intersection est réduite au vecteur nul. Comme la somme de leurs dimensions est la dimension de E ils sont donc supplémentaires et orthogonaux. Alors plus de doute :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f \text{ est le supplémentaire orthogonal de } \operatorname{Im} f \text{ dans l'espace vetoriel euclidien } (E, \varphi).}$$

5) a) Notons que les coordonnées de e_0, e_1, e_2 dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Alors :

$\varphi(e_0, e_0) = 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 1$, $\varphi(e_1, e_1) = 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1$, $\varphi(e_2, e_2) = 0 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times 1 = 1$. Et :

$\varphi(e_0, e_1) = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0$, $\varphi(e_0, e_2) = 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 1 = 0$, $\varphi(e_1, e_2) = 0 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$.

La famille (e_0, e_1, e_2) est donc orthonormée. Alors :

$$\boxed{\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2) \text{ est une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien } (E, \varphi).}$$

Remarque *Quel scoop, la base canonique* $\mathbb{R}_2[X]$ *orthonormée pour le produit scalaire canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$ *! Inouï ! !*

b) Rappelons que $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2) = e_0 - e_1 + e_2$. Alors $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

La matrice de f dans la base **orthonormée** $\mathcal{B}$ est symétrique. Alors f est un endomorphisme symétrique.

Déterminons $(\operatorname{Im} f)^{\perp}$. Soit P un élément de E.

$P \in (\operatorname{Im} f)^{\perp} \iff \forall Q \in \operatorname{Im} f,\ \varphi(P, Q) = 0 \iff \forall S \in E,\ \varphi(P, f(S)) = 0.$

Comme f est symétrique : $P \in (\operatorname{Im} f)^{\perp} \iff \forall S \in E,\ \varphi(f(P), S) = 0 \iff f(P) \in E^{\perp}$.

Or $E^{\perp}$ est réduit au vecteur nul donc $P \in (\operatorname{Im} f)^{\perp} \iff f(P) = 0_E \iff P \in \operatorname{Ker} f$. Ainsi $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$

$$\boxed{\text{On retrouve que Ker } f \text{ est le supplémentaire orthogonal de Im } f\,!}$$

Remarque *Notons que ceci vaut pour tout endomorphisme f d'un espace vectoriel euclidien quelconque.*

PROBLÈME

1) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k} i\,x_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[i\,x_i\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[i\,x_i\sum_{k=i}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right].$$

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{i=1}^{n}\left[i\,x_i\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{n+1}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[x_i\left(1-\frac{i}{n+1}\right)\right] = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\,x_i.$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\,x_i.}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$(n+1)\,T_n = \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{k} x_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[x_i\sum_{k=i}^{n}1\right] = \sum_{i=1}^{n}\big(n-(i-1)\big)\,x_i.$$

Donc $T_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\,x_i = \sum_{k=1}^{n} y_k$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = T_n.}$$

b) La série de terme général x_n converge donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de ses sommes partielles converge.

Notons S la limite de cette suite. $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Alors d'après le rappel la suite $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers S.

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k = T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{n}{n+1}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k$.

La suite $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1 et la suite $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers S.

Par produit la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers S donc vers $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

$$\boxed{\text{La série de terme général } y_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n\ .}$$

2) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soient a_1, a_2, ..., a_n n réels.

• Supposons que ces n réels sont **strictement** positifs.

ln est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[,\ \ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$. Donc ln est concave sur $]0,+\infty[$.

Alors $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln a_k \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$. De plus $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln a_k = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}$.

Ainsi $\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$. La croissance de la fonction exponentielle permet de dire que :

$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

• Supposons que l'un des réels a_1, a_2, ..., a_n est nul. Alors $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} = 0$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant 0$.

On a encore $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n,\ \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.}$$

b) n un élément de $\mathbb{N}^*$. $z_n = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} = \left[\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\left(k\,x_k\right)\right)\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(k\,x_k)\right)\right]^{\frac{1}{n}}$.

$z_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\prod_{k=1}^{n}(k\,x_k)\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{(n)!}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\prod_{k=1}^{n}(k\,x_k)\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\left(\prod_{k=1}^{n}(k\,x_k)\right)^{\frac{1}{n}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ z_n = \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\left(\prod_{k=1}^{n}(k\,x_k)\right)^{\frac{1}{n}}.}$$

n un élément de $\mathbb{N}^*$. x_1, $2\,x_2$, ..., $n\,x_n$ sont des réels positifs ou nuls.

Alors **a)** donne : $\left(\prod_{k=1}^{n}(k\,x_k)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k\,x_k) = (n+1)\,\frac{1}{(n+1)\,n}\sum_{k=1}^{n}(k\,x_k) = (n+1)\,y_n$.

Donc $z_n = \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\left(\prod_{k=1}^{n}(k\,x_k)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\,(n+1)\,y_n = \frac{n+1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\,y_n$ car $\frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$ est positif ou nul.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \leqslant \frac{n+1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\,y_n.}$$

c) Nous venons de voir que ln est concave sur $]0, +\infty[$. Alors sa courbe représenative est au-dessous de toutes ses tangentes. En particulier de celle au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = x - 1$.

Alors $\forall x \in]0, +\infty[,\ \ln x \leqslant x - 1$. Ainsi $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant (1+x) - 1 = x$. Cela montre largement que :

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ positif, on a } \ln(1+x) \leqslant x.}$$

d) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\frac{1}{n}$ est un réel positif donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$.

Ce qui donne $n\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1$ puis $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1$. Donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e.}$$

e) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^k}{k^k}=\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+1)^k}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k^k}=\frac{\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1}(k)^{k-1}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k^k}=\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(k)^{k-1}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k^k}=\frac{(n+1)^n\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k)^{k-1}}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(k^{k-1}\times k\right)\right)}.$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=\frac{(n+1)^n\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k)^{k-1}}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k^{k-1}\right)\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k\right)}=\frac{(n+1)^n}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k}=\frac{(n+1)^n}{n!}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul, on a } \frac{(n+1)^n}{n!}=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}.}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\displaystyle\frac{(n+1)^n}{n!}=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$ donc $\displaystyle\frac{n+1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}=\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{\frac{1}{n}}$ car $t\to t^{\frac{1}{n}}$ est croissante sur $[0,+\infty[$.

Alors $\displaystyle z_n\leqslant\frac{n+1}{(n!)^{1/n}}\,y_n=\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{\frac{1}{n}}y_n$.

Or $\forall k\in[\![1,n]\!],\ 0\leqslant\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{k}\leqslant e$. Donc $\displaystyle 0\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\leqslant e^n$.

Ainsi $\displaystyle 0\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant e$ toujours par croissance de la fonction $t\to t^{\frac{1}{n}}$ sur $[0,+\infty[$.

Comme y_n est positif : $\displaystyle z_n\leqslant\frac{n+1}{(n!)^{1/n}}\,y_n=\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{\frac{1}{n}}y_n\leqslant e\,y_n$.

Finalement $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant z_n\leqslant e\,y_n$ et la série de terme général $e\,y_n$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général z_n converge.

De plus $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}z_n\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}(e\,y_n)=e\sum_{n=1}^{+\infty}y_n=e\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$.

$$\boxed{\text{La série de terme général } z_n \text{ onverge et } \sum_{n=1}^{+\infty}z_n\leqslant e\sum_{n=1}^{n}x_n.}$$

3) a) Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$ et soit k un élément de $[\![1,n-1]\!]$.

ln est croissante sur $\left[\dfrac{k}{n},\dfrac{k+1}{n}\right]$ donc $\forall t\in\left[\dfrac{k}{n},\dfrac{k+1}{n}\right],\ \ln\dfrac{k}{n}\leqslant\ln t\leqslant\dfrac{k+1}{n}$.

En intégrant il vient $\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln\frac{k}{n}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln t\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln\frac{k+1}{n}\,\mathrm{d}t$ car $\dfrac{k}{n}\leqslant\dfrac{k+1}{n}$.

Donc $\displaystyle\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)\ln\frac{k}{n}\leqslant\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln t\,\mathrm{d}t\leqslant\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)\ln\frac{k+1}{n}$ ou $\displaystyle\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n}\leqslant\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln t\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n}\ln\frac{k+1}{n}$.

$$\boxed{\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \forall k\in[\![1,n-1]\!],\ \frac{1}{n}\ln\frac{k}{n}\leqslant\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln t\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n}\ln\frac{k+1}{n}.}$$

b) Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$. Posons : $\forall t \in]0,+\infty[,\ u(t)=t$ et $v(t)=\ln t$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall t \in]0,+\infty[,\ u'(t)=1$ et $v'(t)=\dfrac{1}{t}\cdot$ Cela justifie l'intégration par parties suivantes.

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t \,\mathrm{d}t = \Big[t\,\ln t\Big]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} t\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n}\,\ln\frac{1}{n} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\ln n}{n} - \left(1-\frac{1}{n}\right) = -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}\cdot$$

$$\boxed{\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t\,\mathrm{d}t = -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}\cdot}$$

Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$. Posons $H_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{n}\cdot$

$\forall k \in [\![1,n-1]\!],\ \dfrac{1}{n}\,\ln\dfrac{k}{n} \leqslant \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln t\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{n}\,\ln\dfrac{k+1}{n}\cdot$ En sommant de 1 à $n-1$ il vient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k}{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln t\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k+1}{n}\cdot$$

Donc $H_n - \dfrac{1}{n}\,\ln\dfrac{n}{n} \leqslant \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln t\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\ln\dfrac{k}{n}$ ou $H_n \leqslant -1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\ln n}{n} \leqslant H_n - \dfrac{1}{n}\,\ln\dfrac{1}{n}\cdot$

Ainsi $H_n \leqslant -1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\ln n}{n} \leqslant H_n + \dfrac{\ln n}{n}$. Ceci donne encore : $-1+\dfrac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant -1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\ln n}{n}\cdot$

$$\boxed{\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ -1+\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n} \leqslant -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}\cdot}$$

c) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ -1+\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\dfrac{k}{n} \leqslant -1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\ln n}{n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}\right) = -1.$

Alors par encadrement on obtient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\right) = -1$. Ceci qui donne encore : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = -1.$

La continuité de la fonction exponentielle en -1 permet de dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}} = e^{-1}$ ou

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{-1}$. Comme e^{-1} n'est pas nul : $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1}.$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\prod_{k=1}^{n}k}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\cdot$

Donc $\dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1}$, ce qui donne successivement $\dfrac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} e$ et $\dfrac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e}{n}\cdot$ Alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}\cdot}$$

4) a) $\forall r \in [\![N,+\infty[\![,\ \sum_{n=1}^{r} x_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\cdot$ Donc $\lim_{r\to+\infty} \sum_{n=1}^{r} x_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\cdot$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N) \text{ existe et vaut } \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\cdot}$$

Si $n \in [\![N+1,+\infty[\![$ le dernier terme du produit $\prod_{k=1}^{n} x_k(N)$ est nul donc ce produit est nul.

Alors $\forall n \in [\![N+1,+\infty[\![,\ z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{\frac{1}{n}} = 0.$

$\forall r \in [\![N,+\infty[\![,\ \sum_{n=1}^{r} z_n(N) = \sum_{n=1}^{N} z_n(N)\cdot$ Donc $\lim_{r\to+\infty} \sum_{n=1}^{r} z_n(N) = \sum_{n=1}^{N} z_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{\frac{1}{n}}.$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) \text{ existe et vaut } \sum_{n=1}^{N} z_n(N) \text{ ou } \sum_{n=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{\frac{1}{n}} \text{ ou } \sum_{n=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ ou } \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}.}$$

b) La série de terme général $\frac{e}{n}$ est divergente et à termes positifs et $\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}\cdot$ Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montent alors que la série de terme général $\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ diverge.

Les séries de termes généraux $\frac{e}{n}$ et $\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ sont divergentes, à termes positifs et $\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}\cdot$

Alors d'après le résultat admis "leurs sommes partielles d'ordre N sont équivalentes quand N est au voisinage de $+\infty$".

Alors $\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{N} \frac{e}{n}\cdot$ Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) \underset{N\to+\infty}{\sim} e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)\cdot$

Notons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N) = \sum_{n=1}^{N} x_n(N) = \sum_{n=1}^{\mathbb{N}} \frac{1}{n} > 0.$ Alors $\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e.$

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e.}$$

5) Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge.

Notons $\mathcal{L}$ l'ensemble des réels λ tels que pour tout élément $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{S}$ on ait $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ où $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$

L'étude précédente nous a montré que e apparient à $\mathcal{L}$. Montrons que e est le plus petit élément de $\mathcal{L}$.

Soit λ un élément de $\mathcal{L}$. Montrons que $e \leqslant \lambda$.

Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\big(x_n(N)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ appartient à $\mathcal{S}$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$. De plus $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > 0$.

Ainsi $\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} \leqslant \lambda$ et ceci pour tout N dans $\mathbb{N}^*$.

En faisant tendre N vers $+\infty$ il vient $e \leqslant \lambda$ car $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e$.

$$\boxed{e \text{ est le plus petit élément de } \mathcal{L}.}$$

$$\boxed{\text{"}e \text{ est la plus petite des constantes } \lambda \text{ telle que } \sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n\text{".}}$$
