PROBLÈME DHEC 2012

1) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} i\, x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[i\, x_i \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[i\, x_i \sum_{k=i}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right].$$

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{i=1}^{n} \left[i\, x_i \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\right] = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (n+1-i)\, x_i.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (n+1-i)\, x_i.}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$(n+1)\, T_n = \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{k} x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i \sum_{k=i}^{n} 1\right] = \sum_{i=1}^{n} \big(n-(i-1)\big)\, x_i.$$

Donc $T_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (n+1-i)\, x_i = \sum_{k=1}^{n} y_k$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = T_n.}$$

b) La série de terme général x_n converge donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de ses sommes partielles converge.

Notons S la limite de cette suite. $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Alors d'après le rappel la suite $\left(\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers S.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} y_k = T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{n}{n+1}\, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k.$$

La suite $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1 et la suite $\left(\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers S.

Par produit la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers S donc vers $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

$$\boxed{\text{La série de terme général } y_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n\ .}$$

2) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soient a_1, a_2, ..., a_n n réels.

• Supposons que ces n réels sont **strictement** positifs.

ln est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ \ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$. Donc ln est concave sur $]0, +\infty[$.

Alors $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln a_k \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$. De plus $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln a_k = \dfrac{1}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}$.

Ainsi $\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$. La croissance de la fonction exponentielle permet de dire que :

$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

• Supposons que l'un des réels a_1, a_2, ..., a_n est nul. Alors $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} = 0$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant 0$.

On a encore $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n,\ \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.}$$

b) n un élément de $\mathbb{N}^*$. $z_n = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} = \left[\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\left(k\,x_k\right)\right)\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(k\,x_k)\right)\right]^{\frac{1}{n}}$.

$z_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\prod_{k=1}^{n}(k\,x_k)\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{(n)!}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\prod_{k=1}^{n}(k\,x_k)\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\left(\prod_{k=1}^{n}(k\,x_k)\right)^{\frac{1}{n}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ z_n = \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\left(\prod_{k=1}^{n}(k\,x_k)\right)^{\frac{1}{n}}.}$$

n un élément de $\mathbb{N}^*$. x_1, $2\,x_2$, ..., $n\,x_n$ sont des réels positifs ou nuls.

Alors **a)** donne : $\left(\prod_{k=1}^{n}(k\,x_k)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k\,x_k) = (n+1)\,\frac{1}{(n+1)\,n}\sum_{k=1}^{n}(k\,x_k) = (n+1)\,y_n$.

Donc $z_n = \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\left(\prod_{k=1}^{n}(k\,x_k)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\,(n+1)\,y_n = \frac{n+1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\,y_n$ car $\frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$ est positif ou nul.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \leqslant \frac{n+1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\,y_n.}$$

c) Nous venons de voir que ln est concave sur $]0, +\infty[$. Alors sa courbe représenative est au-dessous de toutes ses tangentes. En particulier de celle au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = x - 1$.

Alors $\forall x \in]0, +\infty[,\ \ln x \leqslant x - 1$. Ainsi $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant (1+x) - 1 = x$. Cela montre largement que :

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ positif, on a } \ln(1+x) \leqslant x.}$$

d) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\frac{1}{n}$ est un réel positif donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$.

Ce qui donne $n\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1$ puis $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1$. Donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e.}$$

e) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^k}{k^k}=\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+1)^k}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k^k}=\frac{\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1}(k)^{k-1}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k^k}=\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(k)^{k-1}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k^k}=\frac{(n+1)^n\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k)^{k-1}}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k^{k-1}\times k)\right)}.$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=\frac{(n+1)^n\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k)^{k-1}}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k^{k-1}\right)\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k\right)}=\frac{(n+1)^n}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k}=\frac{(n+1)^n}{n!}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul, on a } \frac{(n+1)^n}{n!}=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k.}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\displaystyle\frac{(n+1)^n}{n!}=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ donc $\displaystyle\frac{n+1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}=\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{\frac{1}{n}}$ car $t\to t^{\frac{1}{n}}$ est croissante sur $[0,+\infty[$.

Alors $\displaystyle z_n\leqslant\frac{n+1}{(n!)^{1/n}}\,y_n=\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{\frac{1}{n}}y_n.$

Or $\forall k\in[\![1,n]\!],\ 0\leqslant\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k\leqslant e$. Donc $\displaystyle 0\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\leqslant e^n.$

Ainsi $\displaystyle 0\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant e$ toujours par croissance de la fonction $t\to t^{\frac{1}{n}}$ sur $[0,+\infty[$.

Comme y_n est positif : $\displaystyle z_n\leqslant\frac{n+1}{(n!)^{1/n}}\,y_n=\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{\frac{1}{n}}y_n\leqslant e\,y_n.$

Finalement $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant z_n\leqslant e\,y_n$ et la série de terme général $e\,y_n$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général z_n converge.

De plus $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}z_n\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}(e\,y_n)=e\sum_{n=1}^{+\infty}y_n=e\sum_{n=1}^{+\infty}x_n.$

$$\boxed{\text{La série de terme général } z_n \text{ onverge et } \sum_{n=1}^{+\infty}z_n\leqslant e\sum_{n=1}^{n}x_n.}$$

3) a) Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$ et soit k un élément de $[\![1,n-1]\!]$.

ln est croissante sur $\left[\dfrac{k}{n},\dfrac{k+1}{n}\right]$ donc $\forall t\in\left[\dfrac{k}{n},\dfrac{k+1}{n}\right],\ \ln\dfrac{k}{n}\leqslant\ln t\leqslant\dfrac{k+1}{n}.$

En intégrant il vient $\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln\frac{k}{n}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln t\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln\frac{k+1}{n}\,\mathrm{d}t$ car $\dfrac{k}{n}\leqslant\dfrac{k+1}{n}.$

Donc $\displaystyle\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)\ln\frac{k}{n}\leqslant\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln t\,\mathrm{d}t\leqslant\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)\ln\frac{k+1}{n}$ ou $\displaystyle\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n}\leqslant\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln t\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n}\ln\frac{k+1}{n}.$

$$\boxed{\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \forall k\in[\![1,n-1]\!],\ \frac{1}{n}\ln\frac{k}{n}\leqslant\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln t\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n}\ln\frac{k+1}{n}.}$$

b) Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$. Posons : $\forall t\in]0,+\infty[,\ u(t)=t$ et $v(t)=\ln t$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall t\in]0,+\infty[,\ u'(t)=1$ et $v'(t)=\dfrac{1}{t}\cdot$ Cela justifie l'intégration par parties suivantes.

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln t\,\mathrm{d}t=\Big[t\ln t\Big]_{\frac{1}{n}}^{1}-\int_{\frac{1}{n}}^{1}t\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}-\int_{\frac{1}{n}}^{1}1\,\mathrm{d}t=\frac{\ln n}{n}-\left(1-\frac{1}{n}\right)=-1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}\cdot$$

$$\boxed{\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln t\,\mathrm{d}t=-1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}\cdot}$$

Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$. Posons $H_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\cdot$

$\forall k\in[\![1,n-1]\!],\ \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{k}{n}\leqslant\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln t\,\mathrm{d}t\leqslant\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{k+1}{n}\cdot$ En sommant de 1 à $n-1$ il vient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k}{n}\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln t\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k+1}{n}\cdot$$

Donc $H_n-\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{n}{n}\leqslant\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln t\,\mathrm{d}t\leqslant\dfrac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\ln\dfrac{k}{n}$ ou $H_n\leqslant-1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\ln n}{n}\leqslant H_n-\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{n}\cdot$

Ainsi $H_n\leqslant-1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\ln n}{n}\leqslant H_n+\dfrac{\ln n}{n}$. Ceci donne encore : $-1+\dfrac{1}{n}\leqslant H_n\leqslant-1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\ln n}{n}\cdot$

$$\boxed{\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ -1+\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\leqslant-1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}\cdot}$$

c) $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ -1+\dfrac{1}{n}\leqslant\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\dfrac{k}{n}\leqslant-1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\ln n}{n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}\right)=-1.$

Alors par encadrement on obtient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\right)=-1$. Ceci qui donne encore : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=-1.$

La continuité de la fonction exponentielle en -1 permet de dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}e^{\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}}=e^{-1}$ ou

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{-1}$. Comme e^{-1} n'est pas nul : $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\underset{n\to+\infty}{\sim}e^{-1}.$

Or $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}k}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\cdot$

Donc $\dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}e^{-1}$, ce qui donne successivement $\dfrac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\underset{n\to+\infty}{\sim}e$ et $\dfrac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{e}{n}\cdot$ Alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{e}{n}\cdot}$$

4) a) $\forall r \in [\![N,+\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{r} x_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\cdot$ Donc $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \sum_{n=1}^{r} x_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\cdot$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N) \text{ existe et vaut } \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\cdot}$$

Si $n \in [\![N+1,+\infty[\![$ le dernier terme du produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k(N)$ est nul donc ce produit est nul.

Alors $\forall n \in [\![N+1,+\infty[\![,\ z_n(N) = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{\frac{1}{n}} = 0.$

$\forall r \in [\![N,+\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{r} z_n(N) = \sum_{n=1}^{N} z_n(N)\cdot$ Donc $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \sum_{n=1}^{r} z_n(N) = \sum_{n=1}^{N} z_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{\frac{1}{n}}.$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) \text{ existe et vaut } \sum_{n=1}^{N} z_n(N) \text{ ou } \sum_{n=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{\frac{1}{n}} \text{ ou } \sum_{n=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ ou } \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}.}$$

b) La série de terme général $\dfrac{e}{n}$ est divergente et à termes positifs et $\left(\dfrac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e}{n}\cdot$ Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montent alors que la série de terme général $\left(\dfrac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ diverge.

Les séries de termes généraux $\dfrac{e}{n}$ et $\left(\dfrac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ sont divergentes, à termes positifs et $\left(\dfrac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e}{n}\cdot$

Alors d'après le résultat admis "leurs sommes partielles d'ordre N sont équivalentes quand N est au voisinage de $+\infty$".

Alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{N} \frac{e}{n}\cdot$ Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) \underset{N\to+\infty}{\sim} e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)\cdot$

Notons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N) = \sum_{n=1}^{N} x_n(N) = \sum_{n=1}^{\mathbb{N}} \frac{1}{n} > 0.$ Alors $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e.$

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e.}$$

5) Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge.

Notons $\mathcal{L}$ l'ensemble des réels λ tels que pour tout élément $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{S}$ on ait $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ où $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$

L'étude précédente nous a montré que e apparient à $\mathcal{L}$. Montrons que e est le plus petit élément de $\mathcal{L}$.

Soit λ un élément de $\mathcal{L}$. Montrons que $e \leqslant \lambda$.

Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\big(x_n(N)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ appartient à $\mathcal{S}$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$. De plus $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > 0$.

Ainsi $\dfrac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} \leqslant \lambda$ et ceci pour tout N dans $\mathbb{N}^*$.

En faisant tendre N vers $+\infty$ il vient $e \leqslant \lambda$ car $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e$.

$$\boxed{e \text{ est le plus petit élément de } \mathcal{L}.}$$

$$\boxed{\text{"}e \text{ est la plus petite des constantes } \lambda \text{ telle que } \sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n\text{".}}$$
