J.F. COSSUTTA jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

EDHEC 2013

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(n+1)-n}{n\,(n+1)} = \dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{1}{a_n}\cdot$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\cdot}$$

$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{r} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{r}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{r+1}$ par "télescopage".

Alors $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \sum_{n=1}^{r} \frac{1}{a_n} = \lim_{r\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{r+1}\right) = 1$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{1}{a_n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 1.}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k\,(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n\,(n+1)}{6}\,\big(2n+1+3\big).$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+4)}{6} = \dfrac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}\cdot$

Alors $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \dfrac{n}{\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}} = \dfrac{3}{(n+1)\,(n+2)}\cdot$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{3}{(n+1)\,(n+2)}\cdot}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{3}{(n+1)\,(n+2)} = \dfrac{3}{a_{n+1}}\cdot$

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge, la série de terme général $\dfrac{3}{a_{n+1}}$ converge également.

Alors la série de terme général u_n converge. De plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_{n+1}} = 3\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 3\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1}\right) = 3\left(1 - \frac{1}{1\,(1+1)}\right) = 3\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot$$

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2}\cdot}$$

► *Remarque Il était sans doute plus rapide d'utiliser la même méthode que dans* **1) a)** *et d'écrire que :*

$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{r} u_n = 3\sum_{n=1}^{r}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r+2}\right)\cdots$ ◄

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2} \leqslant 2 = 2 \times 1 = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}\cdot$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.}$$

2) a) et b) Nous allons regrouper le tout dans un même programme. Nous écrirons une version récursive de fact (fonction fact) et une version itérative de fact (fonction fact2).

Calculer $a_1+a_2+\cdots+a_n$ en appelant à chaque fois la fonction fact est une hérésie. Nous donnerons donc une fonction qui calcule honorablement u_n (fonction u) et nous écrirons aussi ce qu'attend le concepteur (programme principal).

```
Program Edhec_2013;

function fact(n:integer):integer;

Begin if n=0 then fact:=1
             else fact:=n*fact(n-1); end;

function fact2(n:integer):integer;

var k,a:integer;

begin
a:=1;
for k:=1 to n do a:=a*k;
fact2:=a;
end;

function u(n:integer):real;

var k,f,s:integer;

begin
f:=1;s:=1;
for k:=2 to n do
    begin
    f:=f*k;s:=s+f;
    end;
u:=n/s;
end;

var n,k,ubu:integer;

begin

write('Donner n. n=');readln(n);

ubu:=1;

for k:=2 to n do ubu:=ubu+fact(k);

writeln('u_',n,'=',n/ubu);

end.
```

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n!} = \dfrac{1^n}{n!}\cdot$ Or le cours indique que pour tout réel x, la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge. Ainsi :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{1}{a_n} \text{ converge.}}$$

d) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k! \geqslant n! > 0$. Donc $\dfrac{1}{n!} \geqslant \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}$ et $n \geqslant 0$. Alors :

$$\frac{1}{(n-1)!} = \frac{n}{n!} \geqslant \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} = \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = u_n.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \frac{1}{(n-1)!}\cdot}$$

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$ et la série de terme général $\dfrac{1}{(n-1)!}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général u_n converge.

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ converge.}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$ car les deux séries convergent.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} = \mathrm{e} - 1.$$

Or $2 \leqslant \mathrm{e}$ donc $2 \leqslant 2\,\mathrm{e} - \mathrm{e}$ et ainsi $\mathrm{e} \leqslant 2\,(\mathrm{e}-1)$. Alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant 2\,(\mathrm{e}-1) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}\cdot$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}\cdot}$$

On revient au cas général.

3) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit $< .,. >$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\|.\|$ la norme associée.

Dans l'espace vectoriel euclidien $\big(\mathbb{R}^n, < .,. > \big)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz indique que :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ |< x,y >| \leqslant \|x\|\,\|y\|$. Ce qui revient à dire que :

$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} (x_k\, y_k)\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$. Ou que :

$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k\, y_k)\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$

Notons que $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k > 0$. Alors : $\displaystyle (1 + 2 + \cdots + n)^2) = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \times \frac{k}{\sqrt{a_k}}\right)^2.$

Alors ce qui précède permet d'écrire que : $\displaystyle (1 + 2 + \cdots + n)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{a_k}\right)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{\sqrt{a_k}}\right)^2\right)$. Donc :

$$\left(1+2+\cdots+n\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right) = \left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right)\cdot$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+2+\cdots+n\right)^2 \leqslant \left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right)\cdot}$$

Ou :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right)\cdot}$$

4) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

Notons que : $4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = 4\,\frac{(n+1)^2-n^2}{\left(n\,(n+1)\right)^2} = 4\,\frac{n^2+2n+1-n^2}{\left(n\,(n+1)\right)^2} = 4\,\frac{2n+1}{\left(n\,(n+1)\right)^2} = \frac{2n+1}{\left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2}\cdot$

Or $\frac{n\,(n+1)}{2} = 1+2+\cdots+n$ donc $4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{2n+1}{(1+2+\cdots+n)^2}\cdot$

Rappelons que $\left(1+2+\cdots+n\right)^2 \leqslant \left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right)$.

De plus $\left(1+2+\cdots+n\right)^2$ et $a_1+a_2+\cdots+a_n$ sont strictement positifs. Alors :

$$\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \frac{1}{\left(1+2+\cdots+n\right)^2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right) = \frac{1}{\left(1+2+\cdots+n\right)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\cdot$$

De plus $2n+1$ est positif, ainsi : $\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \frac{2n+1}{\left(1+2+\cdots+n\right)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k} = 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\cdot$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\cdot}$$

b) Soit N dans $\mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède :

$\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right)\cdot$ Transformons le second terme.

$\sum_{n=1}^{N}\left(4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right) = \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{n}\left[4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\right]\right)\cdot$ En commutant les deux sommes il vient :

$$\sum_{n=1}^{N}\left(4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right) = 4\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=k}^{N}\left[\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\right]\right) = 4\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k^2}{a_k}\sum_{n=k}^{N}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right].$$

Un petit "télescopage" donne alors : $\sum_{n=1}^{N}\left(4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right) = 4\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k^2}{a_k}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right)\right].$

Or $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{k^2}{a_k} \geqslant 0$ et $\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right) \leqslant \frac{1}{k^2}$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{k^2}{a_k}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right) \leqslant \frac{k^2}{a_k}\,\frac{1}{k^2} = \frac{1}{a_k}\cdot$ Donc :

$$\sum_{n=1}^{N}\left(4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right) = 4\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k^2}{a_k}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right)\right] \leqslant 4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}\cdot$$

Alors $\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right) \leqslant 4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}\cdot$ Ainsi :

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} \cdot}$$

c) La série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ est convergente (par hypothèse) et à termes positifs donc $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k} \cdot$

Alors $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} \leqslant 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k} \cdot$

Ainsi la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ est à termes positifs et la suites de ses sommes partielles est majorée par $4 \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k} \cdot$ Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \text{ converge.}}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \cdot$

$0 \leqslant n \leqslant n + \dfrac{1}{2}$ et $a_1 + a_2 + \cdots + a_n > 0$ donc $0 \leqslant u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant \dfrac{n + \frac{1}{2}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \dfrac{1}{2} \dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \cdot$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2} \dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \cdot$

De plus la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ converge donc il en est de même pour la série de terme général $\dfrac{1}{2} \dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \cdot$

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général u_n converge.

De plus : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant \frac{1}{2} \left(4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \right) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \cdot$

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \cdot}$$
