EDHEC 2013

Exercice 1

Q1 a) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{a_n}$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

$\forall r\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{r}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{r}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{r+1}$; $\lim_{r\to+\infty}\sum_{n=1}^{r}\frac{1}{a_n}=\lim_{r\to+\infty}\left(1-\frac{1}{r+1}\right)=1$.

Donc la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}=1$.

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n(n+1)}{6}(2n+1+3)=\frac{n(n+1)(2n+4)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=\frac{n}{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}=\frac{3}{(n+1)(n+2)}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\frac{3}{(n+1)(n+2)}$.

c) $\forall r\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{r}u_n=3\sum_{n=1}^{r}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r+2}\right)$; $\lim_{r\to+\infty}\sum_{n=1}^{r}u_n=\frac{3}{2}$.

Alors la série de terme général u_n converge et $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\frac{3}{2}$.

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\frac{3}{2}<2=2\times 1=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$. $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.

Q2 a) et b) 1°.. Nous regrouperons le tout dans un même programme.

2°.. Nous écrirons une version récursive et une version itérative de fact

3°.. calculer $a_1+a_2+\cdots+a_n$ en appelant à chaque fois la fonction fact est une hérésie. Nous donnerons donc une fonction calculant raisonnablement u_n tout en donnant ce qu'attend le concepteur.

```
Program EDHEC_2013;
```

```
function fact (n:integer):integer;
begin
If n=0 then fact:=1
       else fact:= n*fact(n-1);
end;
```

Version récursive de fact

```
function fact2(n:integer): integer;
var k,a : integer;
begin
a:=1;
For k:=1 to n do
 a:=a*k;
fact2:=a;
end;
```

Version itérative de fact

```
function u(n:integer):real;
var k,f,s:integer
begin
f:=1; s:=1;
for k:=2 to n do
    begin
    f:=f*k; s:=s+f;
    end;
u:=n/s;
end;
```

Une fonction qui calcule u_n honorablement...

(suite ⟶)

oui integer !

```
Var n, k, ubu : integer;

begin
write ('Donner n. n= '); readln (n);
ubu := 1;
for k := 2 to n do
ubu := ubu + fact (k);
writeln ('u_', n, '=', n /ubu);
end.
```

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n!}$ et la série de terme général converge $\frac{1}{n!}$ converge (cours).

<u>la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge.</u>

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k! \geqslant n! > 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n!} \geqslant \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$ et $n \geqslant 0$!

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(n-1)!} = \frac{n}{n!} \geqslant \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} a_k} = \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = u_n$.

<u>$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \frac{1}{(n-1)!}$.</u>

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{(n-1)!}$ et la série de terme général $\frac{1}{(n-1)!}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que <u>la série de terme général u_n converge.</u>

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \frac{1}{(n-1)!}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$ car les deux séries convergent.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} - 1\right).$$

Or $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{1!} = 1$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

Remarque.. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = e - 1$.

(Q3) Rappel.- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

"Cauchy-Schwarz" dit que " : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$.

ce qui revient à dire que $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$

ou $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1+2+\dots+n)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \times \frac{k}{\sqrt{a_k}}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{a_k})^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{\sqrt{a_k}}\right)^2\right).$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k > 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1+2+\dots+n)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right)$.

ou $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1+2+\dots+n)^2 \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \dots + \frac{n^2}{a_n}\right)$.

(Q4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que $4\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 4\frac{(n+1)^2 - n^2}{(n(n+1))^2} = 4\frac{2n+1}{(n(n+1))^2} = \frac{2n+1}{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$.

$(1+2+\dots+n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et $(1+2+\dots+n)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right)$

Alors $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right)$, $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 > 0$ et $\sum_{k=1}^{n} a_k > 0$.

Alors $\dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq \dfrac{1}{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{a_k}$ et $2n+1 \geq 0$.

donc $\dfrac{2n+1}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq \dfrac{2n+1}{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{a_k} = 4\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right) \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{a_k}$

donc $\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq 4\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right) \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{a_k}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq 4 \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \left[\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right]}_{S_N}$

Permutation classique

$S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \frac{k^2}{a_k}\right] = \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=k}^{N} \left[\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \frac{k^2}{a_k}\right].$

$S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left[\frac{k^2}{a_k} \sum_{n=k}^{N} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\right] = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{k^2}{a_k}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(N+1)^2}\right)\right] \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{a_k} \times \frac{1}{k^2}.$

$\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(N+1)^2} \leq \dfrac{1}{k^2}$ et $\dfrac{k^2}{a_k} \geq 0$

donc $S_N \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}$

Ainsi $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}$.

c) La série de terme général $\dfrac{1}{a_k}$ est convergente et à termes positifs.

Alors $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$.

donc $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$.

Ainsi la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée donc cette série est convergente.

La série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ est convergente.

de plus $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \le 4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{a_k} = 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.

ce qui donne également $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1/2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \le 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle 0 \le \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \le \frac{n+1/2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ et la série de terme général

$\displaystyle\frac{n+1/2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ converge. Alors :

1) la série de terme général $\displaystyle u_n = \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ converge ;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \le \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1/2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \le 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.

<u>La série de terme général u_n converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \le 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.</u>

Exercice 2

Q1 Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$.

$M_{\mathcal{B}}(f) = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\operatorname{Im} f = f(E) = f(\operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3)) = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \operatorname{Vect}(0_E, e_1, 2e_1 + 3e_2)$

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1, 2e_1 + 3e_2) = \operatorname{Vect}(e_1, 3e_2) = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ & (e_1, e_2) est libre.

Alors $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Comme $\dim E = 3$, <u>$\operatorname{Im} f$ est un hyperplan de E.</u>

$\forall x \in E$, $f(x) \in \operatorname{Im} f$ donc $\forall x \in \operatorname{Im} f$, $f(x) \in \operatorname{Im} f$. <u>$\operatorname{Im} f$ est stable par f</u>

Q2 <u>a)</u> Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ un élément de E.

$x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \iff (f - \lambda \operatorname{Id}_E)(x) = 0_E \iff (M - \lambda I_3)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (2-\lambda)\alpha + \beta + \sigma = 0 \\ \alpha + (2-\lambda)\beta + \sigma = 0 \\ \alpha + \beta + (2-\lambda)\sigma = 0 \end{cases}$.

$x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \sigma = (\lambda - 1)\alpha \\ \alpha + \beta + \sigma = (\lambda - 1)\beta \\ \alpha + \beta + \sigma = (\lambda - 1)\sigma \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \sigma = (\lambda - 1)\alpha \\ (\lambda - 1)\alpha = (\lambda - 1)\beta \\ (\lambda - 1)\alpha = (\lambda - 1)\sigma \end{cases}$.

<u>1er cas.</u> $\lambda \neq 1$

$x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \iff \begin{cases} \alpha = \beta = \sigma \\ 3\alpha = (\lambda - 1)\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \beta = \sigma \\ (4 - \lambda)\alpha = 0 \end{cases}$.

<u>a)</u> $\lambda \neq 4$

$x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = \beta = \sigma \end{cases} \iff \alpha = \beta = \sigma = 0 \iff x = 0_E$. λ n'est pas valeur propre de f.

<u>b)</u> $\lambda = 4$

$x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \iff \alpha = \beta = \sigma$

Alors 4 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $e_1 + e_2 + e_3$.

<u>2ème cas.</u> $\lambda = 1$

$x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \iff \alpha + \beta + \sigma = 0$.

Alors 1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est l'hyperplan d'équation $x + y + z = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.

Ainsi

1) $\mathrm{Sp} f = \{1,4\}$

2) $SEP(f,4) = \mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3)$

3) $SEP(f,1)$ est l'hyperplan d'équation $\alpha+\beta+\gamma=0$ dans $\mathcal{B}$.

<u>b)</u> $\mathrm{Ker}(f-Id_E) = SEP(f,1)$ donc $\mathrm{Ker}(f-Id_E)$ est un hyperplan. Soit x un élément de $\mathrm{Ker}(f-Id_E)$.

$f(x)=x$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f-Id_E)$.

$\mathrm{Ker}(f-Id_E)$ est stable par f.

<u>$\mathrm{Ker}(f-Id_E)$ est un hyperplan de E stable par f.</u>

Q3 a) Soit $(x,y) \in E^2$. Soit X (resp. Y) la matrice de x (resp. y) dans la base $\mathcal{B}$.

MX (resp. ${}^tMY$) est la matrice de $f(x)$ (resp. $f^*(y)$) dans la base $\mathcal{B}$.

Comme $\mathcal{B}$ est orthonormale : $\langle f(x),y\rangle = {}^t(MX)Y$ et $\langle x,f^*(y)\rangle = {}^tX({}^tMY)$.

Alors $\langle f(x),y\rangle = {}^t(MX)Y = ({}^tX\,{}^tM)Y = {}^tX({}^tMY) = \langle x,f^*(y)\rangle$.

<u>$\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x),y\rangle = \langle x,f^*(y)\rangle$.</u>

<u>b)</u> Soit g un second endomorphisme de E tel que $\forall (x,y)\in E^2$, $\langle f(x),y\rangle = \langle x,g(y)\rangle$.

Alors $\forall (x,y)\in E^2$, $\langle x,g(y)\rangle = \langle f(x),y\rangle = \langle x,f^*(y)\rangle$.

$\forall x\in E$, $\forall y \in E$, $\langle x, g(y)-f^*(y)\rangle = 0$.

$\forall y\in E$, $g(y)-f^*(y) \in E^\perp$ et $E^\perp = \{0_E\}$. $\forall y \in E$, $g(y)-f^*(y)=0$. $\forall y\in E$, $g(y)=f^*(y)$

donc $g=f^*$.

<u>f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant $\forall (x,y)\in E^2$, $\langle f(x),y\rangle = \langle x,f^*(y)\rangle$.</u>

Q4 a) λ est valeur propre de f donc de M.

Alors $M-\lambda I_n$ n'est pas inversible donc ${}^t(M-\lambda I_n)$ n'est pas inversible.

Or ${}^t(M-\lambda I_n) = {}^tM - {}^t(\lambda I_n) = {}^tM - \lambda I_n$. Donc ${}^tM-\lambda I_n$ n'est pas inversible.

Ainsi λ est valeur propre de ${}^tM$ donc <u>λ est valeur propre de f^*.</u>

b) $u \neq 0_E$ donc $\text{Vect}(u)$ est de dimension 1. Alors $\dim (\text{Vect}(u))^\perp = \dim E - 1$.

Par conséquent <u>$(\text{Vect}(u))^\perp$ est un hyperplan de E</u>. Montrons qu'il est stable par f.

Soit $x \in (\text{Vect}(u))^\perp$. Soit $z \in \text{Vect}(u)$. $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $z = \alpha u$. $f^*(z) = \alpha f^*(u) = \alpha \lambda u = \lambda z$.

$\langle f(x), z \rangle = \langle x, f^*(z) \rangle = \langle x, \lambda z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle = 0$

$x \in (\text{Vect}(u))^\perp$ et $z \in \text{Vect}(u)$.

$\forall z \in \text{Vect}(u)$, $\langle f(x), z \rangle = 0$ donc $f(x) \in (\text{Vect}(u))^\perp$.

$\forall x \in (\text{Vect}(u))^\perp$, $f(x) \in (\text{Vect}(u))^\perp$. <u>$(\text{Vect}(u))^\perp$ est stable par f.</u>

<u>$(\text{Vect}(u))^\perp$ est un hyperplan de E stable par f.</u>