J.F. COSSUTTA jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

Ceci est un premier jet et a besoin encore de relectures pour bien tenir la route.

EDHEC 2014

EXERCICE 1

1) a) • U est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ comme produit de deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$!

• Déterminons la fonction de répartition F_U de U.

Soit Φ la fonction de répartition de X. Rappelons que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_U(x) = P(U \leqslant x) = P(\emptyset) = 0$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ F_U(x) = P(U \leqslant x) = P(X^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} < X \leqslant \sqrt{x})$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ F_U(x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$.

On a donc $F_U(x) = \begin{cases} \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Notons que l'on a encore : $F_U(x) = \begin{cases} \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}$ car $F_U(0) = \Phi(\sqrt{0}) - \Phi(-\sqrt{0}) = 0$.

$x \to \sqrt{x}$ et $x \to \sqrt{-x}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et de classes $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. De plus Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Alors par composition $x \to \Phi(\sqrt{x})$ et $x \to \Phi(\sqrt{-x})$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et de classes $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Par différence F_U est continue sur $[0, +\infty[$ et de $\mathcal{C}^1$ classe sur $]0, +\infty[$.

Rappelons que F_U est nulle sur $]-\infty, 0]$. Alors F_U est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$, et elle est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$.

Cela permet de dire que F_U est continue sur $\mathbb{R}$ et au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points. Alors U est une variable aléatoire à densité.

• $\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_U'(x) = 0$.

$\forall x \in]0, +\infty[, F_U'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, \Phi'(x) - \left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\, \Phi'(-\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \big(\Phi'(\sqrt{x}) + \Phi'(\sqrt{-x})\big)$.

$\forall x \in]0, +\infty[, F_U'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{(-\sqrt{x})^2}{2}} \right) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell_U(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

ℓ_U est est application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ positive ou nulle, qui coïncide avec F_U' sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points. Donc ℓ_U est une densité de U.

► *Remarque J'aurais pu aller un peu plus vite en écrivant* $\forall x \in [0, +\infty[,\ F_U(X) = 2\,\Phi(\sqrt{x}) - 1$. *Mais j'ai préféré être au plus près de la gestion du carré d'une variable aléatoire à densité* ◄

Concluons en deux versions.

Version 1 On admet que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell_U(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\, e^{-\frac{x}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}} & \text{si } x\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. Donc U suit la loi Gamma de paramètres 2 et $\dfrac{1}{2}\cdot$

Version 2 On n'admet pas que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$... et on le retrouve.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\, e^{-\frac{x}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}} & \text{si } x\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Donc h est une densité d'une variable aléatoire réelle à densité qui suit la loi Gamma de paramètres 2 et $\dfrac{1}{2}\cdot$

Alors : $1=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\, e^{-\frac{t}{2}}\, t^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{t}{2}}\, t^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t$.

Ainsi $1=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\ell_U(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}\ell_U(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\times 1=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot$ Ainsi $\sqrt{\pi}=\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Alors $\ell_U=h$.

On retrouve donc le résultat de la version 1.

Comme Y a même loi que X, $V=Y^2$ a même loi que $U=X^2$. Ainsi :

$$\boxed{U \text{ et } V \text{ suivent la loi gamma de paramètres 2 et } \frac{1}{2}\cdot}$$

► *Exercice* *Retrouver la valeur de* $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ *en faisante un changement de variable* ($u=\sqrt{2\,t}$...). ◄

b) Le cours indique encore que $E(U)$ existe et vaut $2\times\dfrac{1}{2}$ donc 1 et $V(U)$ existe et vaut $2^2\times\dfrac{1}{2}$ donc 2.

Il en est de même pour V car V a même loi que U.

$$\boxed{U \text{ et } V \text{ possède une espérance commune qui vaut 1. } U \text{ et } V \text{ possède une variance commune qui vaut 2.}}$$

2) a) X et Y sont indépendantes donc $U=X^2$ et $V=Y^2$ sont indépendantes. De plus U et V suivent la loi gamma de paramètres 2 et $\dfrac{1}{2}\cdot$ Le cours montre alors que $U+V$ suit la loi gamma de paramètres 2 et $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot$

Ainsi $U+V$ suit la loi gamma de paramètres 2 et 1 donc la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{W \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \frac{1}{2}\cdot}$$

b) Rappelons que nous avons posé plus haut $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell_U(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}} & \text{si } x\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ et dit que ℓ_U est une densité de U et de V.

Notons que rien n'indique que f_U (resp. f_V) coïncide avec ℓ_U ! ! De même rien n'indique que f_U (resp. f_V) soit définie sur $\mathbb{R}$.

f_U (resp. f_V) et ℓ_U sont deux densités de U (resp. V). Alors f_U (resp. f_V) et ℓ_U coïncident sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

Or ℓ_U est nulle sur $]-\infty,0]$ donc f_U (resp. f_V) est nulle sur $]-\infty,0]$ privé d'un ensemble fini de points.

Soit x est un élément de $[0,+\infty[$. Rappelons que $F_W(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)\,f_V(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Or f_U est nulle sur $]-\infty,0]$ privé d'un ensemble fini de points. Il en est de même pour $t\to f_U(t)\,f_V(x-t)$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_U(t)\,f_V(x-t)\,\mathrm{d}t=0$. Alors $F_W(x)=\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_U(t)\,f_V(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Or f_V est nulle sur $]-\infty,0]$ privé d'un ensemble fini de points. Alors $t\to f_V(x-t)$ est nulle sur $[x,+\infty[$ privé d'un ensemble fini de points.

Il en est de même pour $t\to f_U(t)\,f_V(x-t)$. Ainsi $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} f_U(t)\,f_V(x-t)\,\mathrm{d}t=0$. Donc $F_W(x)=\displaystyle\int_{0}^{x} f_U(t)\,f_V(x-t)\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } x \text{ de } [0,+\infty[,\ f_W(x)=\int_0^x f_U(t)\,f_V(x-t)\,\mathrm{d}t.}$$

c) • Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}x} & \text{si } x\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. g est une densité de W.

Notons F_W la fonction de répartition de W.

g est en particulier continue sur $]0,+\infty[$ donc F_W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[,\ F'_W(x)=g(x)$.

• Appliquons le résultat de **Q2**. ℓ_u est une densité de U et de V.

Considérons la fonction g_W nulle sur $]-\infty,0[$ et définie sur $[0,+\infty[$ par $g_W(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\ell_U(t)\,\ell_U(x-t)\,\mathrm{d}t$. D'après **Q2**, g_W est une densité de W.

De plus $\forall x\in[0,+\infty[,\ g_W(x)=\displaystyle\int_0^x \ell_U(t)\,\ell_U(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Alors $\forall x\in]0,+\infty[,\ g_W(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t^{-\frac12}\,e^{-\frac{t}{2}}}{2^{\frac12}\sqrt{\pi}}\,\frac{(x-t)^{-\frac12}\,e^{-\frac{(x-t)}{2}}}{2^{\frac12}\sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}t=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\,\pi}\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t\,(x-t)}}=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\,\pi}\,I(x)$.

Soit x un élément de $]0,+\infty[$. $t\to\dfrac{t}{x}$ est une bijection strictement croissante de $]0,x[$ sur $]0,1[$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t\,(x-t)}}$ converge d'après ce qui a été admis...

On peut donc faire le changement $y=\dfrac{t}{x}$ dans cette intégrale... en récupérant une intégrale convergente.

$$I(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t\,(x-t)}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(x\,y)\,(x-x\,y)}}\,x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y\,(1-y)}}=I(1).$$

$I(x)=I(1)$ et ceci pour tout x dans $]0,+\infty[$. Alors $\forall x\in]0,+\infty[,\ g_W(x)=\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\,\pi}\,I(x)=\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\,\pi}\,I(1)$.

Ceci permet de dire que g_W est continue sur $]0,+\infty[$, de redire que F_W est de classes $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et d'écrire que $\forall x\in]0,+\infty[,\ F'_W(x)=g_W(x)=\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\,\pi}\,I(x)$.

Ainsi $\forall x\in]0,+\infty[,\ \dfrac12\,e^{-\frac12 x}=g(x)=F'_W(x)=g_W(x)=\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\,\pi}\,I(x)$ et $e^{-\frac{x}{2}}\neq 0$.

Alors $\forall x\in]0,+\infty[,\ 1=\dfrac{1}{\pi}\,I(x)$ et donc $\forall x\in]0,+\infty[,\ I(x)=\pi$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif } I(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t\,(x-t)}} \text{ converge et vaut } \pi.}$$

► *Remarque* *Évidemment cet exercice laisse sans voix lorsque l'on sait que* $I(x)$ *se calcule en deux lignes avec le changement de variable* $t = x \sin^2 u$. ◄

EXERCICE 2

1) • Soit M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(M)$ sont deux réels et M et A sont deux éléments du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{Tr}(A)\,M - \mathrm{Tr}(M)\,A$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donc $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. f est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soit λ un réel. Soient M et N deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$f(\lambda\,M+N) = \mathrm{Tr}(A)\,(\lambda\,M+N) - \mathrm{Tr}(\lambda\,M+N)\,A = \lambda\ \mathrm{Tr}(A)\,M + \mathrm{Tr}(A)\,N - (\lambda\ \mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(N))\,A$ (la trace est linéaire).

$f(\lambda\,M+N) = \lambda\,\big(\mathrm{Tr}(A)\,M - \mathrm{Tr}(M)\,A\big) + \mathrm{Tr}(A)\,N - \mathrm{Tr}(N)\,A = \lambda\,f(M) + f(N)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(\lambda\,M+N) = \lambda\,f(M) + f(N)$. f est linéaire. Finalement :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2) • Supposons que la trace de A est nulle. Alors $f(I_n) = -\,\mathrm{Tr}(I_n)\,A = -n\,A$.

Or A n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $f(I_n)$ n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi f n'est pas l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Supposons que la trace de A n'est pas nulle. Soit $E_{1,2}$ l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne qui vaut 1.

$\mathrm{Tr}(E_{1,2}) = 0$ donc $f(E_{1,2}) = \mathrm{Tr}(A)\,E_{1,2}$. Or $\mathrm{Tr}(A)$ n'est pas le réel nul et $E_{1,2}$ n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $f(E_{1,2})$ n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc f n'est pas l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Dans tous les cas } f \text{ n'est pas l'endomorphisme nul de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

3) a) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$(f \circ f)(M) = f\big(\mathrm{Tr}(A)\,M - \mathrm{Tr}(M)\,A\big) = \mathrm{Tr}(A)\,f(M) - \mathrm{Tr}(A)\,f(A)$ par linéarité de f.

De plus $f(A) = \mathrm{Tr}(A)\,A - \mathrm{Tr}(A)\,A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Donc $(f \circ f)(M) = \mathrm{Tr}(A)\,f(M)$.

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } M \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ on a} : (f \circ f)(M) = \mathrm{Tr}(A)\,f(M).}$$

b) $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (f \circ f)(M) = \mathrm{Tr}(A)\,f(M)$.

Donc $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \big((f \circ f) - \mathrm{Tr}(A)\,f\big)(M) = (f \circ f)(M) - \mathrm{Tr}(A)\,f(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Ainsi $f \circ f - \mathrm{Tr}(A)\,f = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$.

Alors $X^2 - \mathrm{Tr}(A)\,X$ est un polynôme annulateur de f dont les zéros dans $\mathbb{R}$ sont 0 et $\mathrm{Tr}(A)$.

Comme les valeurs propres de f sont contenues dans l'ensemble des zéros de $X^2 - \mathrm{Tr}(A)\,X$ dans $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\text{les valeurs propres } \textbf{possibles} \text{ de } f \text{ sont } 0 \text{ et } \mathrm{Tr}(A).}$$

4) $f(A) = \mathrm{Tr}(A)\,A - \mathrm{Tr}(A)\,A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $A \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, donc 0 est valeur propre de f et A est un vecteur propre associé.

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f.}$$

5) Ici on suppose que la trace de A est nulle.

Nous avons vu que les valeurs propres possibles de f sont 0 et $\mathrm{Tr}(A)$, et que 0 est valeur propre de f. Alors 0 est la seule valeur propre de f.

La question 2 a montré que f n'est pas l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{Ker}\, f$ est différent de E.

Alors SEP $(f, 0)$ est différent de E, donc f n'est pas diagonalisable car 0 est sa seule valeur propre.

$$\boxed{\text{Si la trace de } A \text{ est nulle } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

6) Ici on suppose que la trace de A n'est pas nulle.

a) Tr est une application linéraire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et $\dim \mathbb{R} = 1$. Alors l'image de Tr est de dimension 0 ou 1.

Or $\mathrm{Tr}(I_n) = n$ donc n est un élément non nul de $\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}$. Alors $\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}$ est de dimension 1.

Le théorème du rang montre alors que $\dim \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr} = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathrm{Im}\,\mathrm{Tr} = n^2 - 1$.

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = n^2 - 1.}$$

b) Montrons que $\mathrm{Tr}(A)$ est valeur propre de f. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$f(M) = \mathrm{Tr}(A)\, M \Longleftrightarrow \mathrm{Tr}(A)\, M - \mathrm{Tr}(M)\, A = \mathrm{Tr}(A)\, M \Longleftrightarrow \mathrm{Tr}(M)\, A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Or A n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc $f(M) = \mathrm{Tr}(A)\, M \Longleftrightarrow \mathrm{Tr}(M) = 0 \Longleftrightarrow M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

Ainsi $\dim \mathrm{Ker}\big(f - \mathrm{Tr}(A)\, \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\big) = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = n^2 - 1 > 0$. Donc $\mathrm{Tr}(A)$ est une valeur propre de f et le sous-espace propre associé est de dimension $n^2 - 1$.

$\mathrm{Sp}\, f = \{0, \mathrm{Tr}(A)\}$, $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$ et $\dim \mathrm{SEP}\ (f, \mathrm{Tr}(A)) = n^2 - 1$.

Donc $\dim \mathrm{SEP}\ (f, 0) + \dim \mathrm{SEP}\ (f, \mathrm{Tr}(A)) = \dim \mathrm{SEP}\ (f, 0) + n^2 - 1 \geqslant 1 + (n^2 - 1) = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathrm{Sp}\, f = \{0, \mathrm{Tr}(A)\}$ donc $\dim \mathrm{SEP}\ (f, 0) + \dim \mathrm{SEP}\ (f, \mathrm{Tr}(A)) \leqslant \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $\mathrm{Sp}\, f = \{0, \mathrm{Tr}(A)\}$ et $\dim \mathrm{SEP}\ (f, 0) + \dim \mathrm{SEP}\ (f, \mathrm{Tr}(A)) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors f est diagonalisable.

$$\boxed{\text{Si la trace de } A \text{ n'est pas nulle } f \text{ est diagonalisable.}}$$

EXERCICE 3

Partie I : méthode utilisant un produit scalaire

► *Remarque Notons que* $\Delta = \underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}} \displaystyle\int_0^{+\infty} (t^3 - x\,t - y)^2\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$ *existe car* $\left\{ \displaystyle\int_0^{+\infty} (t^3 - x\,t - y)^2\, e^{-t}\,\mathrm{d}t\,;\, (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\right\}$ *est une partie non vide et minorée (par zéro !) de* $\mathbb{R}$. *Un peu plus tard il deviendra un* Min*...* ◄

1) a) Le cours indique que la fonctions $\Gamma : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$ a pour domaine de définition $]0,+\infty[$.

Il dit aussi que $\forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}\, e^{-t}\,\mathrm{d}t = (n-1)!$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{k}\, e^{-t}\,\mathrm{d}t = k!$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} t^k\, e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } k!.}$$

b) Montrons que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

• Soit A un élément de $\mathbb{R}[X]$. Il existe un élément r de $\mathbb{N}$ et un élément $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ de $\mathbb{R}^{r+1}$ tels que :

$\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, x^k$.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k\, e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{r} a_k\, x^k\, e^{-x}\right)\mathrm{d}x$ converge comme combinaison linéaire de $r+1$ intégrales convergentes. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(x)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } A \text{ de } \mathbb{R}[X], \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} A(x)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente.}}$$

Remarque *On pouvait obtenir l'absolue convergence, donc la convergence, de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(x)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x$ *en montrant que* $\left|A(x)\, e^{-x}\right| \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ *par croissance comparée ou en utilisant un équivalent de* $x \to \left|A(x)\, e^{-x}\right|$ *en* $+\infty$.

Soit (P,Q) un couple d'éléments de E.

$P\,Q$ appartient à $\mathbb{R}[X]$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} (PQ)(x)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)\,Q(x)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge !

Ainsi $< P, Q >$ existe et est réel !

$< .,. >$ est bien une application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit λ un réel et soient P, Q, R trois éléments de E.

$< \lambda\,P + Q, R >= \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(\lambda\,P + Q\big)(x)\, R(x)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \big(\lambda\,P(x)\,R(x) + Q(x)\,R(x)\big)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x.$

$< \lambda\,P + Q, R >= \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(\lambda\,P(x)\,R(x)\, e^{-x} + Q(x)\,R(x)\, e^{-x}\big)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_0^{+\infty} P(x)\,R(x)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} Q(x)\,R(x)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x$

car toutes les intégrales convergent. Alors $< \lambda\,P + Q, R >= \lambda < P, R > + < Q, R >$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q,R) \in E^3,\ < \lambda\,P + Q, R >= \lambda < P, R > + < Q, R >$. $< .,. >$ est linéaire à gauche.

• Soit (P,Q) un couple d'éléments de E. $< P,Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} Q(x)\,P(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x =< Q,P >$.

$\forall (P,Q) \in E^2,\ < P,Q >=< Q,P >$. $< .,. >$ est symétrique.

• Soit P un élément de E. $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(P(x)\big)^2\,e^{-x} \geqslant 0$ et $0 \leqslant +\infty$! donc $< P,P >= \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(P(x)\big)^2\,e^{-x}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

$\forall P \in E,\ < P,P > \geqslant 0$. $< .,. >$ est positive.

• Soit P un élément de E tel que $< P,P >= 0$.

▼ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(P(x)\big)^2\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0$.

▼ $x \to \big(P(x)\big)^2\,e^{-x}$ est positive sur $[0,+\infty[$.

▼ $x \to \big(P(x)\big)^2\,e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

▼ $0 \neq +\infty$!

Alors $x \to \big(P(x)\big)^2\,e^{-x}$ est nulle sur $[0,+\infty[$. Comme $x \to e^{-x}$ ne s'annule pas sur $[0,+\infty[: \forall x \in [0,+\infty[,\ \big(P(x)\big)^2 = 0$.

Ainsi $\forall x \in [0,+\infty[,\ P(x) = 0$. Le polynôme P admet alors une infinité de zéroz c'est donc le polynôme nul. $P = 0_E$.

$\forall P \in E,\ < P,P >\Rightarrow P = 0_E$. $< .,. >$ est définie.

Les cinq points précédents permettent de dire que :

$$\boxed{< .,. > \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2) $\forall P \in E,\ \|P\|^2 =< P,P >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,P(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \big(P(t)\big)^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Alors si Q est un polynôme de F défini par $Q = x\,X + y$, où x et y sont deux réels :

$\|X^3 - Q\|^2 = \|X^3 - x\,X - y\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(t^3 - x\,t - y\big)^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Si Q est un polynôme de F défini par $Q = x\,X + y$, où x et y sont deux réels : $\|X^3 - Q\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(t^3 - x\,t - y\big)^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

3) a) $(E, < .,. >)$ est un espace vectoriel euclidien, F est un sous espace vectoriel de E et X^3 est un élément de E.

Le théorème de meilleur approximation indique que :

1. $\{\|X^3 - Q\|\,,\ Q \in F\}$ possède un minimum donc $\{\|X^3 - Q\|^2\,,\ Q \in F\}$ possède également un minimum.
2. Il existe un élément Q_0 de F et un seul qui réalise ces deux minimums.
3. Q_0 est la projection orthogonale de X^3 sur F.
4. $\big(d(X^3,F)\big)^2 = \mathrm{Min}\{\|X^3 - Q\|^2\,,\ Q \in F\} = \|X^3 - Q_0\|^2 = \|X^3\|^2 - \|Q_0\|^2 = \|X^3\|^2 - < X^3, Q_0 >$.

3) b) Q_0 est la projection orthogonale de X^3 sur F et $F = \mathrm{Vect}(1,X)$.

Ainsi $X^3 - Q_0$ appartient à l'orthogonal de F. Alors $X^3 - Q_0$ est orthogonal à 1 et à X.

$$\boxed{< X^3 - Q_0, 1 >= 0 \text{ et } < X^3 - Q_0, X >= 0.}$$

3) c) Q_0 appartient à F donc il existe deux réels x_0 et y_0 tels que $Q_0 = x_0\,X + y_0$.

De plus $< X^3 - Q_0, 1 >=< X^3 - Q_0, X >= 0$.

Alors $0 =< X^3 - Q_0, 1 >=< X^3 - x_0\,X - y_0, 1 >= \displaystyle\int_0^{+\infty} (t^3 - x_0\,t - y_0)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Donc $0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3\,e^{-t}\,\mathrm{d}t - x_0 \int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t - y_0 \int_0^{+\infty} 1 \times e^{-t}\,\mathrm{d}t = 3! - 1! \times x_0 - 0! \times y_0 = 6 - x_0 - y_0$.

Ainsi : $x_0 + y_0 = 6$.

On a aussi $0 =< X^3 - Q_0, X >=< X^3 - x_0\,X - y_0, X >= \displaystyle\int_0^{+\infty} (t^3 - x_0\,t - y_0) \times t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Donc $0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} (t^4 - x_0\,t^2 - y_0\,t)\;e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^4\,e^{-t}\,\mathrm{d}t - x_0 \int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t - y_0 \int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = 4! - 2! \times x_0 - 1! \times y_0$.

Alors $0 = 4! - 2\,x_0 - y_0$ ou $2\,x_0 + y_0 = 4! = 24$.

$$\boxed{\text{Si } Q_0 = x_0\,X + y_0 \text{ réalise le minimum de } \{\|X^3 - Q\|^2\ Q \in F\} \text{ (et réciproquement) : } \begin{cases} x_0 + y_0 = 6 \\ 2\,x_0 + y_0 = 24 \end{cases}.}$$

3) d) $\Delta = \displaystyle\operatorname*{Inf}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^3 - x\,t - y)^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Alors $\Delta = \displaystyle\operatorname*{Inf}_{Q\in F} \int_0^{+\infty} (t^3 - Q)^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \operatorname*{Inf}_{Q\in F} \|X^3 - Q\|^2 = \operatorname*{Min}_{Q\in F} \|X^3 - Q\|^2$.

Donc $\Delta = \|X^3 - Q_0\|^2 = \|X^3\|^2 - \|Q_0\|^2 = \|X^3\|^2 - < X^3, Q_0 >$.

Calculons Q_0. Cela revient à trouver (x_0, y_0) vérifiant : $\begin{cases} x_0 + y_0 = 6 \\ 2\,x_0 + y_0 = 24 \end{cases}$.

En retranchant à la deuxième ligne la première ligne il vient $x_0 = 18$. En remplaçant x_0 par 18 dans la première ligne il vient $y_0 = -12$.

$\Delta = \|X^3\|^2 - < X^3, Q_0 >= \displaystyle\int_0^{+\infty} t^6\,e^{-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} t^3\,(18\,t - 12)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = 6! - 18 \int_0^{+\infty} t^4\,e^{-t}\,\mathrm{d}t + 12 \int_0^{+\infty} t^3\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

$\Delta = 720 - 18 \times 4! + 12 \times 3! = 720 - 18 \times 24 + 12 \times 6 = 720 - 432 + 72 = 360$.

$$\boxed{\text{La valeur de } \Delta \text{ est } 360.}$$

► *Remarque* $(18, -12)$ *est l'unique élément de* $\mathbb{R}^2$ *qui réalise* $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^3 - x\,t - y)^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$. ◄

Partie II : méthode utilisant une fonction de deux variables

---

4) Soit (x, y) un élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$f(x, y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (t^3 - x\,t - y)^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (t^6 + x^2 t^2 + y^2 - 2\,x\,t^4 - 2\,y\,t^3 + 2\,x\,y\,t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

$f(x, y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^6\,\mathrm{d}t - 2\,x \int_0^{+\infty} t^4\,\mathrm{d}t - 2\,y \int_0^{+\infty} t^3\,\mathrm{d}t + x^2 \int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{d}t + 2\,x\,y \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{d}t + y^2 \int_0^{+\infty} t^0\,\mathrm{d}t$ car toutes les intégrales convergent.

$f(x, y) = 6! - 2\,x \times 4! - 2\,y \times 3! + x^2 \times 2! + 2\,x\,y \times 1! + y^2 \times 0! = 2\,x^2 + y^2 + 2\,x\,y - 48\,x - 12\,y + 720$.

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x,y)=2\,x^2+y^2+2\,x\,y-48\,x-12\,y+720.}$$

5) Notons que f est une fonction polynôme sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Soit (x,y) un élément de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4\,x+2\,y-48$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2\,y+2\,x-12$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases}4\,x+2\,y-48=0\\ 2\,x+2\,y-12=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}2\,x+y=24\\ x+y=6\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x=24-6\\ x+y=6\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x=18\\ y=6-18\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases}x=18\\ y=-12\end{cases}$$

$$\boxed{f \text{ admet un point critique et un seul } (x_0,y_0) \text{ sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R}.\ (x_0,y_0)=(18,-12).}$$

6) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ donc si f possède un extremum local en un point de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, ce point est un point critique de f.

Ainsi (x_0,y_0) est le seul point de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ où f peut admettre un extremum local.

Étudions alors si f admet un extremum local en (x_0,y_0) en utilisant le cours.

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=4,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y)=2$.

Alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\times\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)-\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0,y_0)\right)^2=4\times 2-(2)^2=4>0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)=4>0$.

Le cours permet de dire alors que :

$$\boxed{f \text{ admet en } (x_0,y_0) \text{ un minimum local.}}$$

$f(x_0,y_0)=2\,(18)^2+(-12)^2+2\,(18)\,(-12)-48\times 18-12\times(-12)+720=18\times(36-24-48)+2\times(12)^2+720$.

$f(x_0,y_0)=18\times(-36)+2\times 144+720=-648+288+720=360$.

$$\boxed{f \text{ admet en } (x_0,y_0) \text{ un minimum local qui vaut } 360.}$$

7) Montrons que ce minimum est global. Pour cela établissons que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)$.

Soit (x,y) un élément de $\mathbb{R}^2$. Posons $\alpha=x-x_0$ et $\beta=y-y_0$. Alors $f(x,y)=f(x_0+\alpha,y_0+\beta)$.

$f(x,y)=2\,(x_0+\alpha)^2+(y_0+\beta)^2+2\,(x_0+\alpha)\,(y_0+\beta)-48\,(x_0+\alpha)-12\,(y_0+\beta)+720$.

$f(x,y)=2\,x_0^2+2\,\alpha^2+4\,x_0\,\alpha+y_0^2+\beta^2+2\,y_0\,\beta+2\,x_0\,y_0+2\,x_0\,\beta+2\,\alpha\,y_0+2\,\alpha\,\beta-48\,x_0-48\,\alpha-12\,y_0-12\,\beta+720$.

$f(x,y)=(2\,x_0^2+y_0^2+2\,x_0\,y_0-48\,x_0-12\,y_0+720)+(2\,\alpha^2+\beta^2+2\,\alpha\,\beta)+\alpha\,(4\,x_0+2\,y_0-48)+\beta\,(2\,x_0+2\,y_0-12)$.

Notons que $2\,x_0^2+y_0^2+2\,x_0\,y_0-48\,x_0-12\,y_0+720=f(x_0,y_0)$.

De plus $4\,x_0+2\,y_0-48=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$ et $2\,x_0+2\,y_0-12=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.

Alors $f(x,y)=f(x_0,y_0)+(2\,\alpha^2+\beta^2+2\,\alpha\,\beta)$. Donc $f(x,y)-f(x_0,y_0)=2\,\alpha^2+\beta^2+2\,\alpha\,\beta=\alpha^2+(\alpha+\beta)^2\geqslant 0$.

Ainsi $\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x,y)-f(x_0,y_0)\geqslant 0$ ou $\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)$.

Donc f admet un minimum global en (x_0,y_0).

$\boxed{f \text{ admet un minimum global en } (x_0, y_0).}$

► *Remarque 1* *f admet en (x_0, y_0) un minimum global strict.* ◄

► *Remarque 2* *On peut montrer que f est convexe sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors la question 6 donne la question 7, non ?* ◄

PROBLÈME

Question préliminaire

1) a) Soit x un réel quelconque. Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ M_x(t) = \text{Max}(x, t)$.

$\forall t \in]-\infty, x],\ M_x(t) = \text{Max}(x, t) = x$ et $\forall t \in [x, +\infty[,\ M_x(t) = \text{Max}(x, t) = t$.

$t \to x$ et $t \to t$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Ainsi M_x est continue sur $]-\infty, x]$ et sur $[x, +\infty[$. Cela suffit à dire que M_x est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ la fonction } t \to \text{Max}(x, t) \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

b) Soit x un réel quelconque.

Si x appartient à $]-\infty, 0]$, $y = \displaystyle\int_0^1 \text{Max}(x, t)\,\text{d}t = \int_0^1 t\,\text{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot$

Si x appartient à $]0, 1[$, $y = \displaystyle\int_0^1 \text{Max}(x, t)\,\text{d}t = \int_0^x x\,\text{d}t + \int_x^1 t\,\text{d}t = x\int_0^x 1\,\text{d}t + \left[\frac{t^2}{2}\right]_x^1 = x \times x + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2+1}{2}\cdot$

Si x appartient à $[1, +\infty[$, $y = \displaystyle\int_0^1 \text{Max}(x, t)\,\text{d}t = \int_0^1 x\,\text{d}t = x\int_0^1 1\,\text{d}t = x$. Finalement :

$$\boxed{\text{si } x \text{ est un réel quelconque et si } y = \int_0^1 \text{Max}(x, t)\,\text{d}t,\ y = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } x \in]0, 1[\\ x & \text{si } x \in [1+\infty[\end{cases}.}$$

Partie 1 : étude de plusieurs cas où X est discrète

2) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit ω un élément de Ω. Il existe un unique élément k de $\mathbb{N}^*$ tel que $X(\omega) = k$.

$k \geqslant 1$ donc $Y(\omega) = \displaystyle\int_0^1 \text{Max}\big(X(w), t\big)\,\text{d}t = \int_0^1 \text{Max}\big(k, t\big)\,\text{d}t = k = X(\omega)$. Ainsi $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = X(\omega)$. Alors :

$$\boxed{Y = X.}$$

3) a) $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ donc $P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = 1$.

Alors $P(X = 0) = 1 - P(X = -1) - P(X = 1) = 1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{P(X = 0) = \frac{1}{2}\cdot}$$

b) Soit ω un élément de Ω.

Si $X(\omega) = -1$ ou si $X(\omega) = 0$, $Y(\omega) = \displaystyle\int_0^1 \text{Max}\big(X(\omega), t\big)\,\text{d}t = \frac{1}{2}$ car -1 et 0 sont dans $]-\infty, 0]$.

Si $X(\omega)=1$, $Y(\omega)=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Max}\big(X(\omega),t\big)\,\mathrm{d}t = 1$ car $1\in[1,+\infty[$.

Alors Y ne prend que deux valeurs : $\dfrac{1}{2}$ et 1. Donc :

$$\boxed{Y(\Omega)=\left\{\frac{1}{2},1\right\}\cdot}$$

Y prend la valeur 1 si et seulement si X prend la valeur 1. Donc $P(Y=1)=P(X=1)=\dfrac{1}{4}\cdot$

Alors $P\left(Y=\dfrac{1}{2}\right)=1-P(Y=1)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}\cdot$

$$\boxed{P\left(Y=\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\text{ et }P(Y=1)=\frac{1}{4}\cdot}$$

Y est une variable aléatoire réelle finie donc elle possède une espérance et une variance.

$E(Y)=\dfrac{1}{2}\,P\,(Y=1)+P(Y=1)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{8}\cdot$

$E(Y^2)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\,P\,(Y=1)+(1)^2\,P(Y=1)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{16}\cdot$

$V(Y)=E(Y^2)-\big(E(Y)\big)^2=\dfrac{7}{16}-\left(\dfrac{5}{8}\right)^2=\dfrac{28-25}{64}=\dfrac{3}{64}\cdot$

$$\boxed{Y\text{ possède une espérance et une variance. }E(Y)=\frac{5}{8}\text{ et }V(Y)=\frac{3}{64}\cdot}$$

c) Notons que si l'on tire un nombre au hasard dans $[\![0,3]\!]$, la probabilité que cela soit 0 est $\dfrac{1}{4}$ et la probabilité que ce ne soit pas 0 et $\dfrac{3}{4}\cdot$ Complétons !

```
Function y:real;
var u:integer;
Begin
u:=random(4);
if u=0 then y:=1 else y:=0.5;
End;
```

4) a) $X(\Omega)=\mathbb{N}$. Soit ω un élément de Ω.

Si $X(\omega)=0$, $Y(\omega)=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Max}\big(X(\omega),t\big)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$ car $0\in]-\infty,0]$.

Si k est un élément de $\mathbb{N}^*$ et si $X(\omega)=k$, $Y(\omega)=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Max}\big(X(\omega),t\big)\,\mathrm{d}t=k$ car $k\in[1,+\infty[$. Ainsi :

$$\boxed{Y(\Omega)=\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\mathbb{N}^*.}$$

Notons que Y prend la valeur $\dfrac{1}{2}$ si et seulement si X prend la valeur 0. Ainsi $P\left(Y=\dfrac{1}{2}\right)=P(X=0)=e^{-\lambda}$.

Si k appartient à $\mathbb{N}^*$, Y prend la valeur k si et seulement si X prend la valeur k.

Alors $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(Y=k)=P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}$.

$$\boxed{Y(\omega) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \mathbb{N}^*,\ P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = e^{-\lambda} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}.}$$

b) X posséde un moment d'ordre 2 donc la série de terme général $k^2\, P(X = k)$ est absolument convergente.

Or $Y(\omega) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \mathbb{N}^*$, $P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = e^{-\lambda}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = k) = P(X = k)$.

Ainsi la série de terme général $k^2\, P(Y = k)$ est absolument convergente. Alors Y possède un moment d'ordre 2.

Donc :

$$\boxed{Y \text{ possède une espérance et une variance.}}$$

$E(Y) = \frac{1}{2}\, P\left(Y = \frac{1}{2}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} k\, P(Y = k) = \frac{1}{2}\, e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{+\infty} k\, P(X = k) = \frac{1}{2}\, e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{+\infty} k\, P(X = k) = \frac{1}{2}\, e^{-\lambda} + E(X).$

Alors $E(Y) = \frac{1}{2}\, e^{-\lambda} + E(X) = \frac{1}{2}\, e^{-\lambda} + \lambda = \lambda + \frac{1}{2}\, e^{-\lambda}$.

$E(Y^2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\, P\left(Y = \frac{1}{2}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\, P(Y = k) = \frac{1}{4}\, e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\, P(X = k) = \frac{1}{4}\, e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\, P(X = k).$

$E(Y^2) = \frac{1}{4}\, e^{-\lambda} + E(X^2)$. Alors :

$V(Y) = E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2 = \frac{1}{4}\, e^{-\lambda} + E(X^2) - \left(\frac{1}{2}\, e^{-\lambda} + E(X)\right)^2 = \frac{1}{4}\, e^{-\lambda} + E(X^2) - \frac{1}{4}\, e^{-2\lambda} - e^{-\lambda}\, E(X) - \big(E(X)\big)^2.$

$V(Y) = \frac{1}{4}\, e^{-\lambda} + V(X) - \frac{1}{4}\, e^{-2\lambda} - e^{-\lambda}\, E(X) = \frac{1}{4}\, e^{-\lambda} + V(X) - \frac{1}{4}\, e^{-2\lambda} - e^{-\lambda}\, \lambda.$

$V(Y) = \frac{1}{4}\, e^{-\lambda} + \lambda - \frac{1}{4}\, e^{-2\lambda} - e^{-\lambda}\, \lambda = \frac{1}{4}\, e^{-\lambda}\, (1 - e^{-\lambda}) + \lambda\, (1 - e^{-\lambda}) = (1 - e^{-\lambda})\, \left(\lambda + \frac{1}{4}\, e^{-\lambda}\right).$

$$\boxed{E(Y) = \lambda + \frac{1}{2}\, e^{-\lambda} \text{ et } V(Y) = (1 - e^{-\lambda})\, \left(\lambda + \frac{1}{4}\, e^{-\lambda}\right).}$$

Partie 2 : étude de plusieurs cas où X est à densité

---

5) a) Soit ω un élément de Ω. Rappelons que $X(\Omega) = [0, 1[$.

Supposons que $X(\omega) = 0$. $Y(\omega) = \int_0^1 \mathrm{Max}(X(\omega), t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ car $0 \in]-\infty, 0]$. Donc $Y(\omega) = \frac{0^2 + 1}{2} = \frac{X^2(\omega) + 1}{2}\cdot$

Si $X(\omega)$ appartient à $]0, 1[$, $Y(\omega) = \int_0^1 \mathrm{Max}(X(\omega), t)\, \mathrm{d}t = \frac{X^2(\omega) + 1}{2}\cdot$

Finalement : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \frac{X^2(\omega) + 1}{2} = \frac{X^2 + 1}{2}\, (\omega)\cdot$ Ainsi :

$$\boxed{Y = \frac{X^2 + 1}{2}\cdot}$$

b) $X(\Omega) = [0, 1[$ donc $X^2(\Omega) = [0, 1[$ puisque $z \to z^2$ définie une bijection de $[0, 1[$ sur $[0, 1[$.

Alors $\big(X^2 + 1\big)(\Omega) = [1, 2[$. Ainsi $\frac{X^2 + 1}{2}\, (\Omega) = \left[\frac{1}{2}, 1\right[\cdot$ Donc :

$$\boxed{Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, 1\right[.}$$

c) Soit x un élément de $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$. $F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P\left(\frac{X^2+1}{2} \leqslant x\right) = P(X^2 \leqslant 2\,x - 1)$.

X ne prend que des valeurs positives ou nulles et $2x - 1$ est un réel positif ou nul.

Alors $F_Y(x) = P(X \leqslant \sqrt{2\,x-1}) = F_X(\sqrt{2\,x-1})$.

Or $\sqrt{2x-1}$ appartient à $[0, 1[$ car $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et $\forall z \in [0, 1[,\ F_X(z) = z$ donc $F_Y(x) = \sqrt{2\,x-1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ appartenant à } \left[\frac{1}{2}, 1\right[, \text{ on a} : F_Y(x) = \sqrt{2\,x-1}.}$$

d) $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, 1\right[$. Ainsi $\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[,\ F_Y(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[,\ F_Y(x) = 1$.

$$\text{Ainsi } \forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\\ \sqrt{2\,x-1} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.$$

En remarquant que $F_Y\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\,\frac{1}{2} - 1} = 0$ et que $F_Y(1) = 1 = \sqrt{2 \times 1 - 1}$ on peut encore écrire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \\ \sqrt{2\,x-1} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.$$

$x \to 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$, $x \to \sqrt{2\,x-1}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ et $x \to 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$.

Alors F_Y est continue sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $[1, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$, $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$, $[1, +\infty[$.

Ceci suffit pour dire que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Alors :

$$\boxed{Y \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

e) Rappelons que $Y = \frac{X^2+1}{2} = \frac{1}{2}\,X^2 + \frac{1}{2}$. X possède un moment d'ordre 2, donc X^2 possède une espérance.

Alors Y, qui est une fonction affine de X^2, possède une espérance.

De plus $E(Y) = \frac{1}{2}\,E(X^2) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(V(X) + \big(E(X)\big)^2\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\big(V(X) + \big(E(X)\big)^2 + 1\big)$.

Rappelons que $E(X) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ et $V(X) = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$.

Alors $E(Y)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{4}+1\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{12}+1\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}+1\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{2}{3}\cdot$

$$\boxed{E(Y)=\frac{2}{3}\cdot}$$

► *Exercice* *Utilisez une densité de Y pour retrouver l'existence et la valeur de $E(Y)$.* ◄

f) Il suffit de remarquer que $Y=\dfrac{X^2+1}{2}$ et que l'on peut simuler la variable aléatoire X par la fonction random.

```
Function y:real;
Begin
y:=0.5*(sqr(random)+1);
End;
```

Q6) a) $X-1$ suit la loi exponentielle de paramètre λ. Alors $(X-1)(\Omega)=[0,+\infty[$ donc $X(\Omega)=[1,+\infty[$

$\forall\omega\in\Omega,\ X(\omega)\in[1,+\infty[$ donc $\forall\omega\in\Omega,\ Y(\omega)=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Max}\big(X(\omega),t\big)\,\mathrm{d}t=X(\omega)$. Alors :

$$\boxed{Y=X.}$$

b) $X-1$ suit la loi exponentielle de paramètre λ. Donc $X-1$ possède une espérance qui vaut $\dfrac{1}{\lambda}$ et une variance qui vaut $\dfrac{1}{\lambda^2}\cdot$ Or $X=(X-1)+1$, ainsi X possède une espérance qui vaut $E(X-1)+1$ donc $\dfrac{1}{\lambda}+1$, et une variance qui vaut $V(X-1)$ donc $\dfrac{1}{\lambda^2}\cdot$

$$\boxed{X \text{ possède une espérance qui vaut } \frac{1}{\lambda}+1 \text{ et une variance qui vaut } \frac{1}{\lambda^2}\cdot}$$

c) $U(\Omega)=[0,1[$ et $W=-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$. Donc $W(\Omega)=[0,+\infty[$. Alors $\forall x\in]-\infty,0[,\ F_W(x)=0$.

Soit x dans $[0,+\infty[$. $F_W(x)=P(W\leqslant x)=P\left(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)\leqslant x\right)=P(\ln(1-U)\geqslant-\lambda\,x)=P\big(1-U\geqslant e^{-\lambda\,x}\big)$.

$F_W(x)=P\big(U\leqslant 1-e^{-\lambda\,x}\big)$. Notons que $1-e^{-\lambda\,x}\in[0,1[$ car $x\in[0,+\infty[$. De plus $\forall z\in[0,1[,\ F_U(z)=z$.

Ainsi $F_W(x)=1-e^{-\lambda\,x}$ et ceci pour tout x dans $[0,+\infty[$.

Finalement $F_W(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda\,x} & \text{si } x\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ donc :

$$\boxed{W=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \lambda.}$$

La loi de X est la même que celle de $W+1$ ou que $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)+1$. Pour simuler X il suffit de simuler $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)+1$.

Cela se fait sans difficulté avec random.

```
Function y(lambda:real):real;
Begin
y:=-ln(1-random)/lambda+1;
End;
```

Q7) a) $X(\Omega)=\mathbb{R}$. Soit ω un élément de Ω.

Si $X(\omega)\in]-\infty,0]$, $Y(\omega)=\displaystyle\int_0^1 \text{Max}\big(X(\omega),t\big)\,\text{d}t=\frac{1}{2}\cdot$

Si $X(\omega)\in]0,1[$, $Y(\omega)=\displaystyle\int_0^1 \text{Max}\big(X(\omega),t\big)\,\text{d}t=\frac{X^2(\omega)+1}{2}\cdot$

Si $X(\omega)\in[1,+\infty[$, $Y(\omega)=\displaystyle\int_0^1 \text{Max}\big(X(\omega),t\big)\,\text{d}t=X(\omega)\cdot$

Notons que $x\rightarrow\dfrac{x^2+1}{2}$ définit une bijection de $]0,1[$ sur $\left]\dfrac{1}{2},1\right[$ et $x\rightarrow x$ définit une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.

Ainsi $Y(\Omega)=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\cup\left]\dfrac{1}{2},1\right[\cup[1,+\infty[=\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

$$\boxed{Y(\Omega)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[.}$$

b) Comme nous l'avons vu plus haut : $\forall\omega\in\Omega, Y(\omega)=\dfrac{1}{2}\Longleftrightarrow X(\omega)\in]-\infty,0]$.

Ainsi $P\left(Y=\dfrac{1}{2}\right)=P(X\leqslant 0)=\Phi(0)=\dfrac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{P\left(Y=\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot}$$

c) Rappelons que l'on a : $\forall\omega\in\Omega,\ Y(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \text{si } X(\omega)\leqslant 0\\ \dfrac{X^2(\omega)+1}{2} & \text{si } 0<X(\omega)<1\\ X(\omega) & \text{si } X(\omega)\geqslant 1\end{cases}.$

On peut aussi écrire : $\forall\omega\in\Omega,\ Y(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \text{si } X(\omega)\leqslant 0\\ \dfrac{X^2(\omega)+1}{2} & \text{si } 0\leqslant X(\omega)\leqslant 1\\ X(\omega) & \text{si } X(\omega)\geqslant 1\end{cases}.$

$Y(\Omega)=\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$. Ainsi $\forall x\in\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right[$, $F_Y(x)=0$.

Soit x un élément de $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$. $\big(\{X\leqslant 0\},\{0<X\leqslant 1\},\{1<X\}\big)$ est un système complet d'événements.

La formule des probabilités totales donne :

$F_Y(x)=P(Y\leqslant x))=P\big(\{Y\leqslant x\}\cap\{X\leqslant 0\}\big)+P\big(\{Y\leqslant x\}\cap\{0<X\leqslant 1\}\big)+P\big(\{Y\leqslant x\}\cap\{1<X\}\big)$.

$\{Y\leqslant x\}\cap\{X\leqslant 0\}=\{Y\leqslant x\}\cap\{X\leqslant 0\}\cap\left\{Y=\dfrac{1}{2}\right\}=\{X\leqslant 0\}\cap\left\{Y=\dfrac{1}{2}\right\}=\{X\leqslant 0\}$.

Ainsi $F_Y(x)=P(X\leqslant 0)+P\big(\{Y\leqslant x\}\cap\{0<X\leqslant 1\}\big)+P\big(\{Y\leqslant x\}\cap\{1<X\}\big)$.

- Supposons que x appartienne à $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

  $\longrightarrow P\big(\{Y\leqslant x\}\cap\{0<X\leqslant 1\}\big)=P\left(\left\{\dfrac{X^2+1}{2}\leqslant x\right\}\cap\{0<X\leqslant 1\}\right)=P(\{X^2\leqslant 2x-1\}\cap\{0<X\leqslant 1\})$.

$P\big(\{Y\leqslant x\}\cap\{0<X\leqslant 1\}\big)=P(\{X\leqslant\sqrt{2\,x-1}\}\cap\{0<X\leqslant 1\})=P(0<X\leqslant\sqrt{2\,x-1})$ car $\sqrt{2\,x-1}\in[0,1]$.

$\longrightarrow P\big(\{Y \leqslant x\} \cap \{1 < X\}\big) = P\big(\{X \leqslant x\} \cap \{1 < X\}\big) = 0$ car $x \leqslant 1$.

Ainsi $F_Y(x) = P(X \leqslant 0) + P(0 < X \leqslant \sqrt{2\,x-1}) = P(X \leqslant \sqrt{2\,x-1}) = \Phi(\sqrt{2\,x-1})$.

- Supposons que x appartienne à $]1, +\infty[$.

$\longrightarrow P\big(\{Y \leqslant x\} \cap \{0 < X \leqslant 1\}\big) = P\left(\left\{\dfrac{X^2+1}{2} \leqslant x\right\} \cap \{0 < X \leqslant 1\}\right) = P(\{X^2 \leqslant 2x-1\} \cap \{0 < X \leqslant 1\})$.

$P\big(\{Y \leqslant x\} \cap \{0 < X \leqslant 1\}\big) = P(\{X \leqslant \sqrt{2\,x-1}\} \cap \{0 < X \leqslant 1\}) = P(0 < X \leqslant 1)$ car $\sqrt{2\,x-1} \in]1, +\infty[$.

$\longrightarrow P\big(\{Y \leqslant x\} \cap \{1 < X\}\big) = P\big(\{X \leqslant x\} \cap \{1 < X\}\big) = P(1 < X \leqslant x)$.

Ainsi $F_Y(x) = P(X \leqslant 0) + P(0 < X \leqslant 1) + P(1 < X \leqslant x) = P(X \leqslant x) = \Phi(x)$.

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[\\ \Phi(\sqrt{2\,x-1}) & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \\ \Phi(x) & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}.}$$

d) $P\left(Y = \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \neq 0$ donc Y n'est pas une variable aléatoire à densité.

$Y(\Omega) = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ n'est pas dénombrable (car équipotent à $\mathbb{R}$) donc Y n'est pas une variable aléatoire discrète.

$$\boxed{\text{La variable aléatoire réelle } Y \text{ n'est ni à densité ni discrète.}}$$

e) Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0, 1[$.

Les variables aléatoires de cette suite sont mutuellement indépendantes, ont même loi, ont une espérance commune égale à $\dfrac{1}{2}$ et une variance commune non nulle égale à $\dfrac{1}{12}\cdot$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{V_n} = \dfrac{V_1 + V_2 + \cdots + V_n}{n}\cdot$ Le théorème de la limite centrée montre alors que la suite de terme général $\dfrac{\overline{V_n} - E(\overline{V_n})}{\sqrt{V(\overline{V_n})}}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant la loi normale centée réduite.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(\overline{V_n}) = \dfrac{1}{n}\big(E(V_1) + E(V_2) + \cdot + E(V_n)\big) = \dfrac{1}{n}\, n \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V(\overline{V_n}) = \dfrac{1}{n^2}\big(V(V_1) + V(V_2) + \cdot + V(V_n)\big) = \dfrac{1}{n^2}\, n \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{12\,n}$ car les variables de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\overline{V_n} - E(\overline{V_n})}{\sqrt{V(\overline{V_n})}} = \dfrac{\frac{V_1+V_2+\cdots+V_n}{n} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12\,n}}} = \dfrac{1}{n\sqrt{\frac{1}{12\,n}}}\left(V_1 + V_2 + \cdots + V_n - \dfrac{1}{2}\, n\right)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\overline{V_n} - E(\overline{V_n})}{\sqrt{V(\overline{V_n})}} = \sqrt{\dfrac{12}{n}}\left(V_1 + V_2 + \cdots + V_n - \dfrac{1}{2}\, n\right)$.

> La suite de terme générale $\sqrt{\dfrac{12}{n}}\left(V_1 + V_2 + \cdots + V_n - \dfrac{1}{2}\, n\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant la loi normale centrée réduite.

Donc pour n assez grand on pourra approcher la loi de la variable aléatoire $\sqrt{\dfrac{12}{n}}\,\left(V_1+V_2+\cdots+V_n-\dfrac{1}{2}\,n\right)$ par la loi normale centrée réduite.

On considérera que pour $n=48$ on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\sqrt{\dfrac{12}{n}}\,\left(V_1+V_2+\cdots+V_n-\dfrac{1}{2}\,n\right)$ par la loi normale centrée réduite.

Notons que si $n=48$, $\sqrt{\dfrac{12}{n}}\,\left(V_1+V_2+\cdots+V_n-\dfrac{1}{2}\,n\right)=\sqrt{\dfrac{12}{48}}\,\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{48}V_k-\dfrac{1}{2}\times 48\right)=\dfrac{1}{2}\,\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{48}V_k-24\right)$.

Si U_1, U_2, ..., U_{48} sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1[$, le théorème de la limite centrée qdoit pouvoir permettre d'approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{1}{2}\,\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{48}V_k-24\right)$ par la loi normale centrée réduite.

On simule X par $\dfrac{1}{2}\,\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{48}V_k-24\right)$ et on utilise la définition de Y.

```
Function y(lambda:real):real;
Var k:integer;aux:real;
Begin
aux:=0;
For k:=1 to 48 aux:=aux+random;
x:=(aux-24)/2;
if x<=0 then y:=0.5 else
                       If x<1  then y:=(x*x+1)/2 else y:=x;
End;
```