Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1986

MATHEMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Vendredi 2 mai 1986 de 14 heures à 18 heures

Nota :
– les deux problèmes sont indépendants .
– IN désigne l'ensemble des entiers naturels, et IR celui des nombres réels.

PREMIER PROBLEME

PARTIE I

1. Pour $s \in \mathbb{R}$ fixé, résoudre le système à 5 équations (I), d'inconnue $(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5$:

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} -sx + y = 0 \\ x - sy + z = 0 \\ y - sz + t = 0 \\ z - st + u = 0 \\ t - su = 0 \end{cases}$$

(Il est conseillé de prendre u comme inconnue auxiliaire).

2. A quelle condition, portant sur s, ce système admet-il une autre solution que l'élément nul de $\mathbb{R}^5$?

PARTIE II

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$, et $s \in \mathbb{R}$ fixés, on se propose de résoudre le système à n équations (II), d'inconnue $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} -sx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - sx_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - sx_3 + x_4 = 0 \\ \text{-------------} \\ x_{n-2} - sx_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} - sx_n = 0 \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe des polynômes $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ tels que pour tout $p \in \{1, \ldots, n-1\}$, on ait $x_{n-p} = A_p(s)\, x_n$, et montrer, pour tout $p \in \{1, \ldots, n-3\}$,

$$A_{p+2}(s) = sA_{p+1}(s) - A_p(s)$$

2. On définit un polynôme A_n par la relation

$A_n(s) = sA_{n-1}(s) - A_{n-2}(s)$

Prouver que le système (II) possède des solutions autres que l'élément nul de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $A_n(s) = 0$.

3. Déterminer :

a. Le degré de A_n ;

b. Le coefficient du terme de plus haut degré de A_n ;

c. Le terme de degré 0 de A_n ;

d. La parité de A_n ;

e. Le coefficient de s^{n-2} dans $A_n(s)$.

DEUXIEME PROBLEME

PARTIE I

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, on définit les fonctions P_n et Q_n par :

$$P_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto P_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \leqslant n, \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

$$Q_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto Q_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

a. Étudier les fonctions P_1, P_2 et P_3 d'une part, Q_1, Q_2 et Q_3 d'autre part. Tracer leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé, l'unité étant prise égale à 4 cm. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on notera par C_i la courbe représentative de P_i, et par Γ_i celle de Q_i. On tracera enfin sur le même graphique la courbe E représentative de la fonction e^{-x}.

b. Montrer que la fonction P_n est de classe C^{n-1} sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $P_n^{(n)}$. La fonction P_n est-elle de classe C^n sur $\mathbb{R}^+$?

2. a. Soit φ_1 la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$\varphi_1(t) = \ln(1-t) + \frac{t}{1-t} = \ln(1-t) - 1 + \frac{1}{1-t}$$

Montrer que $\varphi_1 \geqslant 0$ (on pourra étudier les variations de φ_1), et en déduire les variations de la fonction Ψ_1 définie sur $]0,1[$ par $\Psi_1(t) = \dfrac{1}{t}\ln(1-t)$.

b. Soit φ_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi_2(t) = \ln(1+t) - \dfrac{t}{1+t} = \ln(1+t) - 1 + \dfrac{1}{1+t}$.

Montrer que $\varphi_2 \geqslant 0$ (on pourra étudier les variations de φ_2), et en déduire les variations de la fonction Ψ_2 définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Psi_2(t) = -\dfrac{1}{t}\ln(1+t)$.

3. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, on a :

$$P_n(x) \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant e^{-x} \leqslant Q_{n+1}(x) \leqslant Q_n(x).$$

4. a. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ fixé. Quelle est la limite des suites de terme général $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$?

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, étudier l'existence des intégrales impropres

$$\int_0^{+\infty} P_n(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} Q_n(x)\,dx.$$

Lorsqu'elles existent on note $I_n = \int_0^{+\infty} P_n(x)\,dx$ et $J_n = \int_0^{+\infty} Q_n(x)\,dx$.

Calculer I_n et J_n. Quelle est la limite des suites de terme général I_n et J_n lorsque $n \to +\infty$?

PARTIE II

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^{-x} - P_4(x)$$

$$g : [0,4[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x + 3\ln\left(1 - \frac{x}{4}\right)$$

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Établir qu'il existe un unique réel $\alpha \in]1,4[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
3. En déduire les variations de la fonction f.
4. a. Montrer que l'on a l'encadrement : $1{,}8 < \alpha < 1{,}9$.

   b. Calculer une valeur décimale approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

PARTIE III

On considère l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-x^4}\,dx$.

1. Montrer l'existence de cette intégrale. On note $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^4}\,dx$.

   Montrer que $I = \int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^4}\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-x^4}\,dx$.

2. a. En utilisant la question 4. b de la partie II, montrer :

   $\forall x \in [0,\sqrt{2}]$, $0 \leqslant e^{-x^4} - P_4(x^4) \leqslant 0{,}08$.

b. Calculer $\int_0^{\sqrt{2}} P_4(x^4)\,dx$ (on pourra utiliser le changement de variable $u = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$), et en donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

c. En déduire l'encadrement : $0{,}87 \leqslant \int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^4}\,dx \leqslant 1$

3. a. Montrer : $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-x^4}\,dx \leqslant \dfrac{1}{4^{7/4}} \int_4^{+\infty} e^{-y}\,dy$ (on pourra effectuer le changement de variable $y = x^4$).

b. En déduire une valeur décimale approchée de $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-x^4}\,dx$ à 10^{-2} près.

4. Conclure.