Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1987

MATHEMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Vendredi 15 mai 1987 de 14 heures à 18 heures

Nota :

— Les deux problèmes sont indépendants.

— $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

PREMIER PROBLEME

On désigne par $\mathbb{R}_5[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 5.

1. Montrer que l'ensemble E des polynômes de $\mathbb{R}_5[X]$ divisibles par X^3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[X]$. Quelle est la dimension de E ?

2. On note u l'application de $\mathbb{R}_5[X]$ dans lui-même qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_5[X]$, associe le polynôme u(P) défini par

$$u(P) = X\,(P' + P'(0)) - 2\,(P - P(0)).$$

Vérifier que u est une application linéaire.

Pour P élément de $\mathbb{R}_5[X]$, calculer u(P) ; en déduire le noyau, l'image, les valeurs propres et vecteurs propres de l'application u.

Montrer que u est diagonalisable.

DEUXIEME PROBLEME

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par

$$f_n : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n \ln x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 1 . \end{cases}$$

(N.B. $\ln$ désigne le logarithme népérien)

On notera C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé.

PARTIE I

1. a) Quel est le développement limité de la fonction $x \longmapsto \ell n\,(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 ?

b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de f_0, puis de f_n, $n \geqslant 1$.

c) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable en 1. Que vaut $f'_n(1)$?

d) Préciser la position de C_n par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$.

2. a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et calculer $f'_n(x)$.

b) Montrer que pour $n \geqslant 1$, f_n est prolongeable par continuité en 0. Pour quelles valeurs de n ce prolongement est-il dérivable à droite en 0 ?

3. a) Étudier la fonction φ_0 définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\varphi_0(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} - 2\,\ell n\, x$. Quel est le signe de $f'_0(x)$?

b) En déduire les variations de la fonction f_0, et tracer C_0, l'unité étant prise égale à 5 cm.

4. a) Étudier les fonctions φ_1 et φ_2 définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ respectivement par $\varphi_1(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} - \ell n x$ et $\varphi_2(x) = x^2 - 1 - 2\,\ell n x$.

b) En déduire les variations des fonctions f_1 et f_2, et tracer C_1 et C_2 sur le même graphique que C_0.

PARTIE II

On admettra que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente, et que sa somme est égale à $\dfrac{\pi^2}{6}$.

1. a) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, la fonction f_n est intégrable sur le segment $[0,1]$.

b) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 (f_0(x) - f_2(x))dx$ est convergente.

On note $a_1 = \displaystyle\int_0^1 (f_0(x) - f_2(x))dx$. Calculer a_1.

c) En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)dx$ est convergente.

On note $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 f_0(x)dx$. Le but de cette partie est de calculer I .

2. a) Pour $n \geqslant 2$, calculer

$$a_n = \int_0^1 (f_{2n-2}(x) - f_{2n}(x))dx$$

b) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ est convergente.

3. a) Établir, en utilisant l'étude de f_1 effectuée à la partie I , que, pour $n \geqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant 1$, on a

$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n-1}}{2}$. En déduire que $\int_0^1 f_n(x)dx$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

b) On note $S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p$. Montrer que $I = \lim_{n \to +\infty} S_n$.

4. a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$

c) Calculer I .