Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1989

MATHEMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Mardi 16 mai 1989 de 14 heures à 18 heures

Nota :

– Les deux problèmes sont indépendants.

IN désigne l'ensemble des entiers naturels, et IR celui des nombres réels.

PREMIER PROBLÈME

Partie A

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur IR, p et q deux endomorphismes de E tels que :

$p \circ p = p$, $q \circ q = q$, $p \circ q = q \circ p$. On pose : $f = p + q$, $g = p \circ q$.

1. a) Vérifier $g \circ g = g$

   b) Montrer que les valeurs propres de p et de q sont dans $\{0 ; 1\}$.

   c) Démontrer que les valeurs propres de f sont dans $\{0 ; 1 ; 2\}$.

2. a) Démontrer que 0 est valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \neq \{0\}$.

   b) Démontrer que 2 est valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \neq \{0\}$.

Partie B

Soient $N \in \mathrm{IN}^*$ et $\mathrm{IR}_N[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes nul ou de degré $\leqslant N$. Pour tout $n \in \mathrm{IN}$ tel que $n \leqslant N$, on note T_n l'application de $\mathrm{IR}_N[X]$ dans $\mathrm{IR}_N[X]$ définie de la façon suivante :

$$\text{si } P = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k X^k, \text{ avec } \lambda_0, \ldots, \lambda_N \in \mathrm{IR}, \text{ alors } T_n(P) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k.$$

Ainsi, par exemple, avec $N = 4$: $T_3(X + X^2 + 2X^3 + X^4) = X + X^2 + 2X^3$ et $T_4(X + X^2) = X + X^2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathrm{IN}$ tel que $n \leqslant N$, T_n est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathrm{IR}_N[X]$.

2. a) Vérifier, pour tout $n \in \mathrm{IN}$ tel que $n \leqslant N$: $T_n \circ T_n = T_n$.

   b) Pour tout $n \in \mathrm{IN}$ tel que $n \leqslant N$, déterminer le noyau et l'image de T_n.

   c) Montrer pour tous n,r de IN tels que $n \leqslant N$ et $r \leqslant N$: $T_n \circ T_r = T_r \circ T_n$.

3. Soient n, r deux entiers naturels tels que $0 < n \leqslant r < N$.

a) Comparer $\operatorname{Ker}(T_n)$ et $\operatorname{Ker}(T_r)$; comparer $\operatorname{Im}(T_n)$ et $\operatorname{Im}(T_r)$.

b) Montrer que 0 et 2 sont valeurs propres de $T_n + T_r$.

c) $T_n + T_r$ est-il diagonalisable ?

DEUXIÈME PROBLÈME

Partie I

1. Montrer que, pour tout réel x de $]-\infty ; \frac{1}{4}]$, il existe un réel unique y de $]-\infty ; \frac{1}{2}]$ tel que $x = y - y^2$, et calculer y en fonction de x.

On note f l'application définie par : $f :]-\infty ; \frac{1}{4}] \longrightarrow]-\infty ; \frac{1}{2}]$

$$x \longmapsto \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$$

2. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(0 ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 4 cm.

3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-\infty ; \frac{1}{4}[$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-\infty ; \frac{1}{4}[$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}(1-4x)^{-n+\frac{1}{2}} .$$

Partie II

L'objet de cette partie est de déterminer une approximation de f sur $]-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}[$ par des fonctions polynômiales.

1. a) Montrer, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}[$: $f(x) = Q_n(x) + R_n(x)$

où $Q_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-2)!}{(k-1)!\,k!} x^k$ et $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$.

b) Calculer Q_1, Q_2, Q_3, Q_4.

On admettra que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $C_{2n}^{n} < \dfrac{4^n}{\sqrt[3]{n}}$

2. a) Pour $x \in [0 ; \frac{1}{4}[$ fixé, quelle est la borne supérieure de l'application

$$\begin{aligned} [0 ; x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{x-t}{1-4t} \end{aligned} \quad ?$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0 ; \frac{1}{4}[$:

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{(4x)^n}{2\sqrt[3]{n}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt[3]{n}} .$$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-\frac{1}{4} ; 0]$:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{(-4x)^n \cdot |x|}{(n+1)\sqrt[3]{n}} \leqslant \frac{1}{4(n+1)\sqrt[3]{n}} .$$

4. Donner un majorant de $|f(x) - Q_n(x)|$, indépendant de x pour $x \in]-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}[$, et tendant vers 0 quand n tend vers l'infini.

5. a) Déterminer le plus petit entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(n \geqslant N \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{6 \cdot 10^{-4}(n+1)\sqrt[3]{n}} < 1\right).$$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(n \geqslant N \Rightarrow \left|R_n\left(-\frac{1}{6}\right)\right| < 10^{-4}\right)$.

Partie III

On étudie dans cette partie une autre méthode d'approximation de f sur $[0 ; \frac{1}{4}[$ par des fonctions polynômiales.

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} P_0(x) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(x) = x + (P_n(x))^2. \end{cases}$$

1. Calculer P_1, P_2, P_3, P_4.

2. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de P_n et de $P_{n+1} - P_n$ sont des entiers naturels. En déduire que, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

b) Montrer (par récurrence sur n) que, pour tout $x \in [0 ; \frac{1}{4}]$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $P_n(x) \leqslant f(x)$.

c) Démontrer que, pour tout $x \in [0 ; \frac{1}{4}]$, la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f (x).