Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1997

MATHÉMATIQUES
1ère épreuve
(option scientifique)

Lundi 28 avril 1997 de 8 heures à 12 heures

Seules sont autorisées: *Une règle graduée.*
Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

PREMIER PROBLÈME

On note E l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application
$$\phi : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (f,g) \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$
est un produit scalaire sur E.

On note $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On note E_n le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales définies sur $[0,1]$ et de degré inférieur ou égal à $n-1$, et, pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, $e_i : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto t^{i-1}$.

On rappelle que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E_n.

2. Calculer, pour tout (i,j) de $\{1, \dots, n\}^2$, $\phi(e_i, e_j)$.

On considère la matrice carrée réelle d'ordre n :

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

3. **<u>Étude du cas n = 2</u>**

   a. Déterminer les valeurs propres de la matrice H_2.
   b. La matrice H_2 est-elle diagonalisable ?
   c. Montrer que la matrice H_2 est inversible et calculer son inverse.

Dans toute la suite du problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

4. Établir que la matrice H_n est diagonalisable.

5. a. Soient $P \in E_n$, $Q \in E_n$.
   On note $a_1, \dots, a_n$ les réels tels que $P = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, $b_1, \dots, b_n$ les réels tels que $Q = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$,
   A et B les matrices-colonnes définies par : $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

   Montrer : $\phi(P,Q) = {}^tA\, H_n\, B$ où ${}^tA$ désigne la transposée de A.

   b. En déduire que les valeurs propres de la matrice H_n sont toutes strictement positives.

   c. La matrice H_n est-elle inversible ?

6. Soit $f \in E$. On note, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $\beta_i = \phi(e_i, f)$.
   On considère les matrices-colonnes B et A_0 définies par $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et $A_0 = H_n^{-1} B$.

   On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les réels tels que $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, et P_0 le polynôme défini par : $P_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.

   On considère l'application $d : \begin{array}{ccc} E_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \|P-f\| \end{array}$.

   a. Montrer : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\phi(e_i, P_0 - f) = 0$.

   b. En déduire : $\forall Q \in E_n$, $\phi(Q, P_0 - f) = 0$.

   c. Établir : $\forall P \in E_n$, $\|P-f\|^2 = \|P-P_0\|^2 + \|P_0-f\|^2$.

   d. Démontrer que d admet un minimum et que ce minimum est atteint en P_0 et en P_0 seulement.

   e. Montrer : $\|P_0-f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_0\|^2$.

   f. **<u>Un exemple :</u>**
   On choisit ici n = 2 et $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left|t - \frac{1}{3}\right| \end{array}$.

   Calculer P_0 et $d(P_0)$, et donner une valeur approchée décimale de $d(P_0)$ à 10^{-8} près.

DEUXIÈME PROBLÈME

I. Étude de la suite de terme général $M_n = \dfrac{n^n}{n!}e^{-n}$

1. Pour tout entier naturel non nul n, on définit $v_n = -1 + n\,ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, où ln désigne le logarithme népérien.

   a. Montrer qu'il existe un réel α strictement négatif tel que $v_n \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n}$.

   b. En déduire la nature de la série de terme général v_n et montrer que la suite de terme général $V_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ admet $-\infty$ comme limite.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on définit $M_n = \dfrac{n^n}{n!}e^{-n}$.

   a. Montrer, pour tout entier naturel non nul n :

   $$v_n = ln\left(\frac{M_{n+1}}{M_n}\right).$$

   b. En déduire la limite de la suite de terme général M_n.

II. Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction f_n sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

1. Donner le tableau des variations et une représentation graphique de f_1 puis de f_n pour $n \geq 2$.
   On ne déterminera pas les éventuels points d'inflexion.
   Vérifier que M_n est la borne supérieure de f_n.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction F_n sur $[0,+\infty[$ par $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt$.

   a. Soit x un réel positif ou nul. Établir une relation entre $F_{n+1}(x)$, $F_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.
   En déduire, pour tout entier naturel non nul n :

   $$F_n(x) = 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

   b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ est convergente et vaut 1.

III. Étude de la suite de terme général $u_n = F_n(n)$

1. Prouver, pour tout entier naturel non nul n :

   $$u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} f_{n+1}(t)\,dt \; - \; f_{n+1}(n).$$

   En déduire que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers un réel L vérifiant $0 < L \leq 1$.

2. Déterminer une valeur approchée décimale par défaut à 10^{-1} près de u_2.
   En déduire un nouvel encadrement de L.

3. Soit h la fonction définie sur $[0,1]$ par $h(t) = \dfrac{t}{2-t}\, e^{2-2t}$.

   a. Montrer : $\forall t \in [0,1],\ 0 \le h(t) \le 1$.

   b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,n],\ \dfrac{f_n(x)}{f_n(2n-x)} = \left(h\left(\dfrac{x}{n}\right)\right)^n$.

   c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,n],\ f_n(x) \le f_n(2n-x)$.

   d. En utilisant l'inégalité précédente, montrer, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n \le \int_0^n f_n(2n-t)\,dt \le \int_n^{+\infty} f_n(t)\,dt.$$

   En déduire : $L \le \dfrac{1}{2}$.

IV. Détermination de la limite de la suite (u_n) par un raisonnement probabiliste

Soient n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$, suivant une loi de Poisson de paramètre 1.

On note $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

On rappelle que Y_n suit une loi de Poisson.

1. Déterminer l'espérance de Y_n.
2. Exprimer la probabilité $P(Y_n \le n)$ en fonction de u_n.
3. A l'aide du théorème de la limite centrée, que l'on énoncera avec soin, trouver la valeur de L.