Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1980

MATHEMATIQUES
1ère épreuve (4 h.)

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}^+$ celui des réels positifs ou nul.
On adoptera la convention suivante :

$\frac{x^0}{0!} = 1$ quel que soit x dans $\mathbb{R}^+$.

NOTA : Les 3 parties peuvent être traitées indépendamment
(on signale dans les parties 2 et 3 les résultats de la partie 1 à utiliser).

1ère partie :

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on considère les 3 suites définies par :

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad v_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \text{et } w_n(x) = v_n(x) + \frac{x^n}{n!} \text{ pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}.$$

1 - Montrer que la suite $(v_n(x))$ est convergente et, en utilisant la formule de MAC-LAURIN, que sa limite est e^x. Montrer que la suite $(w_n(x))$ a la même limite.

2 - Démontrer que la suite $(v_n(x))$ est croissante et que la suite $(w_n(x))$ est décroissante à partir d'un certain rang.

3 - En utilisant ce qui précède, établir les inégalités :

$$(1) \quad e^x < \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in]0, \text{Log } 2[$$

$$(2) \quad e^x < \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e}{(n+1)!}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in [0, 1].$$

2ème partie :

Pour toute partie A de $\mathbb{N}$, Φ_A désignera la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} \Phi_A(k) = 1 & \text{si } k \in A \\ \Phi_A(k) = 0 & \text{si } k \notin A. \end{cases}$$

A toute partie A de $\mathbb{N}$ et tout réel a dans $\mathbb{R}^+$, on associe la suite $(s_n^A(a))$ définie par :

$$s_n^A(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Phi_A(k)}{k!} a^k .$$

.../...

1 - Démontrer que la suite $\left(s_n^A(a)\right)$ est convergente.

2 - Le réel $a \in \mathbb{R}^+$ étant fixé, on pose, pour toute partie A de $\mathbb{N}$:

$$m(A) = \lim_{n \to +\infty} s_n^A(a).$$

Calculer :

$m(\emptyset)$; $m(\{0\})$; $m(\{p\})$, $p \neq 0$; $m(\mathbb{N})$.

DANS LES QUESTIONS 3, 4, 5, on suppose : $a \in]0, \text{Log } 2[$.

3 - Démontrer les résultats suivants :

a - Si A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$ vérifiant $A \subset B$, alors $m(A) \leqslant m(B)$.

b - Pour toute partie A de $\mathbb{N}$: $m(A) \in [0, 2[$.

c - Si A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{N}$, alors $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

4 - a - Soient A, B deux parties disjointes non vides de $\mathbb{N}$, et p le plus petit élément de $A \cup B$ (on supposera $p \in A$, et donc $p \notin B$). Démontrer, en utilisant l'inégalité (1) de la 1ère partie :

$$m(B) < \frac{a^p}{p!} \leqslant m(A).$$

b - En déduire que si deux parties disjointes A, B vérifient $m(A) = m(B)$, elles sont vides.

5 - a - Démontrer que pour tout couple (A, B) de parties de $\mathbb{N}$:

$$m(A) - m(B) = m(A \cap \complement_{\mathbb{N}} B) - m(B \cap \complement_{\mathbb{N}} A).$$

b - En déduire que l'application :

$m : A \longmapsto m(A)$ est une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ensemble des parties de $\mathbb{N}$, vers l'intervalle $[0, 2[$ de $\mathbb{R}$.

3ème partie :

Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle, continues sur [0, 1].

On considère l'application U qui, à tout élément f de $\mathcal{C}$, associe l'élément U(f) défini par :

$$\left(U(f)\right)(x) = \int_0^x f(t)dt, \ \forall x \in [0, 1].$$

On définit, pour tout entier n, l'application U^n par :

$U^n = U^{n-1} \circ U$, pour $n \geqslant 1$, et $U^0 = I$, application identique de $\mathcal{C}$.

1 - a - Montrer que U est un endomorphisme de $\mathcal{C}$.

b - Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\left(U^n(f)\right)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$$

en raisonnant par récurrence et en utilisant une intégration par parties.

.../...

c - On note V_n l'endomorphisme défini, pour $n \geqslant 1$, par :

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} U^k.$$

Démontrer les relations : $V_n \circ U = U \circ V_n = V_{n+1} - U$.

2 - a - Vérifier que l'application de $\mathscr{C}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$f \longmapsto \|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

est une norme sur $\mathscr{C}$; c'est-à-dire vérifie :

$$\begin{cases} \forall f \in \mathscr{C}, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\| \\ \forall (f,g) \in \mathscr{C}^2 \quad : \|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\| \\ \|f\| = 0 \Longrightarrow f = 0 \end{cases}$$

b - Démontrer que $\|U(f)\| \leqslant \|f\|$, pour tout f de $\mathscr{C}$.

3 - Soit V l'application qui, à tout élément f de $\mathscr{C}$, associe l'élément V(f) défini par :

$$\big(V(f)\big)(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t)dt, \ \forall x \in [0,1].$$

Démontrer que $\|V(f) - V_n(f)\| \leqslant \dfrac{e}{n!} \|f\|$, pour tout entier $n \geqslant 1$, en utilisant l'inégalité (2) de la 1ère partie.

On admettra qu'on peut en déduire les égalités : $V \circ U = U \circ V = V - U$.

4 - a - Déduire de 3 - que $I - U$ et $I + V$ sont deux isomorphismes de $\mathscr{C}$ réciproques l'un de l'autre.

b - Application : trouver la solution f, élément de $\mathscr{C}$, de l'équation intégrale :

$$f(x) - \int_0^x f(t)dt = e^{-x}, \ \forall x \in [0,1].$$