Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1981

MATHEMATIQUES
1ère épreuve

Coefficient 4

Samedi 23 Mai 1981 de 8 heures à 12 heures

Nota : les trois parties sont indépendantes.

1ère partie :

On considère la fonction numérique de variable réelle f définie sur $]-1, +\infty[$ par :

si $t \neq 0$ $\quad f(t) = \frac{1}{e}(1+t)^{\frac{1}{t}+\frac{1}{2}}$

si $t = 0$ $\quad f(t) = 1$.

1 - a - Etablir le développement limité de $\operatorname{Log}(1+t)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 .
En déduire que la fonction f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 .

b - Montrer que f est continue et dérivable en 0 .

2 - Soit φ la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $\quad \varphi(t) = \frac{1}{2}\left(1 + t - \frac{1}{1+t}\right) - \operatorname{Log}(1+t)$.

a - Etablir l'égalité

$$f'(t) = \frac{1}{t^2} \cdot \varphi(t) \cdot f(t) \qquad , t \neq 0 .$$

b - En déduire que f' est continue sur $]-1, +\infty[$.

c - Etudier le signe de $\varphi(t)$ pour $t \in]-1, +\infty[$.

d - En déduire :

$$\forall t \in]-1, +\infty[\ , f(t) \geqslant 1 .$$

3 - Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on considère la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{(nx)^n \cdot n^{1/2}}{n!}$, $n \geqslant 1$.

a - Vérifier, pour $x > 0$, l'égalité $\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = e.x.f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

b - Etudier la convergence de cette série suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}^+$.

c - En déduire les limites des deux suites

$$v_n = \left(\frac{n}{3}\right)^n \cdot \frac{n^{1/2}}{n!},$$

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{2}\right)^k \cdot \frac{k^{1/2}}{k!}.$$

d - Etablir successivement les inégalités suivantes pour $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\mathrm{Log}\,(1+t) \leqslant t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3},$$

$$\mathrm{Log}\,(f(t)) \leqslant \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6}.$$

e - En utilisant 3-a-, établir la majoration

$$\mathrm{Log}\left(u_n\left(\frac{1}{e}\right)\right) \leqslant -1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{12}\,\frac{1}{k^2} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{k^3}\right), \quad n \geqslant 2,$$

et en déduire que la suite $\left(u_n\left(\frac{1}{e}\right)\right)$ est majorée.

f - En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{n^n \cdot e^{-n}}{n!}\right)$.

2ème partie :

$\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme Q_n de $\mathbb{C}[X]$ par

$$Q_n = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right].$$

1 - Déterminer le degré de Q_n.

2 - Pour tout entier naturel r, montrer que

$$(1) \qquad Q_{2r} = \sum_{p=0}^{r} (-1)^p \, C_{2r+1}^{2p+1} \, X^{2r-2p}.$$

3 - a - Déterminer les racines de Q_n. Montrer que ces racines sont réelles.

b - En déduire la décomposition de Q_n en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

4 - Pour tout entier naturel r, montrer que

$$(2) \qquad Q_{2r} = (2r+1) \prod_{k=1}^{r} \left(X^2 - \mathrm{cotg}^2 \frac{k\pi}{2r+1}\right).$$

5 - En utilisant (1) et (2), établir l'égalité

$$\sum_{k=1}^{r} \operatorname{cotg}^2 \frac{k\pi}{2r+1} = \frac{r(2r-1)}{3}$$

(on calculera de deux façons le coefficient de X^{2r-2} dans Q_{2r}).

En déduire que

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2r+1}} = \frac{2r(r+1)}{3} .$$

6 - a - Pour tout x de $]0, \frac{\pi}{2}[$, établir les inégalités

$$\operatorname{cotg}^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} .$$

b - En déduire un encadrement de $\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)^2}$.

c - Montrer que la série numérique de terme général $\frac{1}{k^2}$ est convergente et calculer

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} .$$

3ème partie :

Pour tout entier naturel n et tout réel x strictement supérieur à -1, on pose

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} \, dt .$$

1 - Montrer que F_n est définie et continue sur $]-1, +\infty[$. Etudier son sens de variation.

Montrer que F_n admet des limites en -1 et $+\infty$ et calculer ces limites.

2 - Soit x fixé, avec $x > 0$. Montrer que

$$\forall t \in [0, x], \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1+x)^n}$$

(on pourra comparer d'abord $\frac{t}{1+t}$ et $\frac{x}{1+x}$).

En déduire que la suite $(F_n(x))$ est convergente et déterminer sa limite.

3 - Soit x fixé, avec $-\frac{1}{2} < x < 0$. Montrer que

$$\forall t \in [x, 0], \left|\frac{t^n}{(1+t)^{n+1}}\right| \leqslant 2 \left|\frac{x}{1+x}\right|^n .$$

En déduire que la suite $(F_n(x))$ est convergente et déterminer sa limite.