Ecole Supérieure de Commerce de Lyon 1982

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Nota : les deux problèmes sont indépendants.

1er PROBLEME

On se propose d'étudier l'application F définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin t}\,dt .$$

1 - a - Justifier l'existence de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

b - Montrer que F est décroissante et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ , 0 < F(x) < \frac{\pi}{4} .$$

2 - a - Montrer que

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}] , \frac{2}{\pi}t < \sin t .$$

b - En déduire successivement

$$\forall x > 0 , F(x) < \frac{\pi}{4x}(1 - e^{-x}) , \text{ et } \lim_{x \to +\infty} F(x) = 0 .$$

3 - a - Montrer que

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2 , | e^{-a} - e^{-b} | < | a - b | .$$

b - En déduire que

$$\forall (x_1 , x_2) \in (\mathbb{R}^+)^2 , | F(x_1) - F(x_2) | < \frac{1}{2} | x_1 - x_2 |$$

et que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.

4 - a - Pour $x_0 \in \mathbb{R}^+$, justifier l'existence de $H(x_0) = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x_0 \sin t} \sin t\,dt$.

b - En utilisant par exemple la formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2 , | e^{-a} - e^{-b} + (a-b)\, e^{-b} | < \frac{|a-b|^2}{2} .$$

c - En déduire l'inégalité

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^+ , \forall x \in \mathbb{R}^+ - \{x_0\} , \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - H(x_0) \right| < \frac{\pi}{8} | x - x_0 | .$$

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer $F'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

5 - A tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on associe la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = F(u_n) , n \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

a - En utilisant 3-b., montrer qu'il existe $m \in [0, 1[$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N} , |u_{k+1} - u_k| < m^k |u_1 - u_0| .$$

b - En déduire que pour $(p , q) \in \mathbb{N}^2$, $p > q$:

$$|u_p - u_q| < \frac{m^q}{1-m} |u_1 - u_0|$$

et que, quel que soit α, la suite associée est une suite de Cauchy et qu'elle converge vers une limite $\ell(\alpha)$ vérifiant

$$F(\ell(\alpha)) = \ell(\alpha) .$$

.../...

c · Montrer qu'il existe un seul $x \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $F(x) = x$.

Que peut-on en conclure pour les suites construites précédemment ?

2ème PROBLEME

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à une indéterminée X à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2 .

On appellera B la base de E composée des polynômes 1 , X et X^2 .

Le polynôme F_α étant défini par

$F_\alpha = \alpha 1 + X + X^2 , \alpha \in \mathbb{R}$,

on désigne par φ_α l'application qui, à un polynôme P de E , associe le polynôme R de E , reste de la division euclidienne du produit $F_\alpha . P$ par le polynôme $X^3 - X$.

$\varphi_\alpha (P)$ est donc le seul polynôme R vérifiant

$$\begin{cases} F_\alpha . P = (X^3 - X) . Q + R \\ R = 0 \text{ ou degré } (R) < 3 . \end{cases}$$

1 · a · Déterminer les polynômes $\varphi_\alpha(1)$, $\varphi_\alpha(X)$ et $\varphi_\alpha(X^2)$.

b · Montrer que φ_α est une application linéaire de E dans E .

c · Montrer que

$\varphi_\alpha - \lambda I_E = \varphi_{\alpha - \lambda}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

où I_E désigne l'application identique de E dans E .

2 · Déterminer la matrice M_α de φ_α relativement à la base B .

3 · a · Calculer le déterminant de M_α et discuter la bijectivité de φ_α en fonction du paramètre α .

b · Calculer la matrice inverse M_α^{-1} lorsque M_α est inversible .

4 · a · Montrer que Ker φ_0 , noyau de φ_0 , est l'ensemble des polynômes de E admettant 1 pour racine.

Déterminer Im φ_0 , image de φ_0 .

b · Montrer que Ker φ_{-2} = Im φ_0 et Im φ_{-2} = Ker φ_0 .

5 · a · Calculer les valeurs propres de M_α .

b · Déterminer les sous-espaces propres de φ_α (on pourra utiliser 1 · c ·) .

φ_α est-elle diagonalisable ?

c · Construire une matrice T telle que

$$M_\alpha = T \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + 2 \end{bmatrix} T^{-1} .$$

6 · a · Montrer que

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 , \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha$.

b · Calculer $\varphi_{-2} \circ \varphi_0$.

Le résultat obtenu peut-il être déduit (sans calcul) de 4 · b · ?

c · Calculer $(M_\alpha)^k$, $k \in \mathbb{N}$, et en déduire pour $\alpha \neq -1$:

$$(\varphi_\alpha)^k = \frac{(\alpha+2)^k - \alpha^k}{2} \varphi_\gamma \quad , k \in \mathbb{N}^* \ , \text{avec } \gamma = \frac{2\alpha^k}{(\alpha+2)^k - \alpha^k} .$$

Exprimer $(\varphi_{-1})^k$ en fonction de k .

-FIN-