Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1983

MATHEMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Vendredi 20 Mai 1983 de 8 heures à 12 heures

Nota : la partie I est complètement indépendante des parties II et III.

Les parties II et III sont largement indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE I

On considère les intégrales impropres

$$I_p = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x}\, dx \quad \text{et} \quad J_p = \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{e^x - 1}\, dx \;,\; p \in \mathbb{N}\,.$$

1 - **Étude de I_p .**

a - Montrer qu'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que

$$\forall x \geqslant M \,,\, x^p e^{-x} \leqslant \frac{1}{x^2}\,,$$

et en déduire que I_p existe pour $p \in \mathbb{N}$.

b - Exprimer I_{p+1} à l'aide de I_p , puis en déduire la valeur de I_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2 - **Étude de J_p .**

a - Montrer que J_p existe pour $p \in \mathbb{N}^*$.

b - Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ \frac{x^p}{e^x - 1} = x^p \sum_{k=1}^{n} e^{-kx} + \frac{x^p e^{-nx}}{e^x - 1}\,.$$

c - Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A x^p e^{-kx}\, dx\,.$$

.../...

d - Montrer que, pour $x \geqslant 0$,

$$e^x - 1 \geqslant x,$$

puis que, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $A > 0$,

$$0 \leqslant \int_0^A \frac{x^p . e^{-nx}}{e^x - 1} \, dx \leqslant \frac{(p-1)!}{n^p} .$$

e - En déduire que, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| J_p - p! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+1}} \right| \leqslant \frac{(p+1)!}{n^p} .$$

3 - Pour $p \in \mathbb{N}$, on considère la série numérique de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^{p+1}}$.

Rappeler pour quelles valeurs de p cette série est convergente et, dans ce cas, exprimer sa somme en fonction de J_p.

PARTIE II

Soit x un nombre réel strictement positif et (u_n) la suite réelle ainsi définie

$$(1) \quad \begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N} .$$

1 - Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 1$.

2 - a - Montrer que la suite (u_n) est monotone pour $n \geqslant 1$ et convergente.

b - Déterminer la limite de cette suite.

3 - On considère la série numérique de terme général $v_n = -1 + u_n$.

a - Étudier la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

Que peut-on conclure pour la série de terme général v_n ?

b - En déduire que la suite (P_n) définie par

$$(2) \quad P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$$

est convergente. (Ne pas essayer de calculer sa limite).

PARTIE III

1 - A tout couple (a , b) de réels positifs ou nuls, on associe les suites (a_n) et (b_n) ainsi définies

$$(3) \quad \begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n . b_n} \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N} .$$

a - Calculer a_n et b_n en fonction de n dans les deux cas particuliers $a = 0$, $b \geqslant 0$ et $a \geqslant 0$, $b = 0$.

b - Montrer que $a_n \leqslant b_n$ pour $n \geqslant 1$, et que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones pour $n \geqslant 1$.

c - En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent et ont la même limite. Cette limite qui est fonction de $(a\ ,\ b)$, et qui ne peut être explicitée en général, sera notée $\mathscr{L}(a\ ,\ b)$.

d - Montrer que, pour $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 0$:

(4) $\mathscr{L}(a\ ,\ b) = \mathscr{L}(b\ ,\ a)$

(5) $\mathscr{L}(\lambda a\ ,\ \lambda b) = \lambda \mathscr{L}(a\ ,\ b)$

(6) $\sqrt{ab} \leqslant \mathscr{L}(a\ ,\ b) \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$.

2 - On utilise la limite étudiée plus haut pour définir la fonction

$$F : [0\ ,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \mathscr{L}(1\ ,\ x).$$

a - Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

Montrer que F est positive et croissante.

b - Montrer que, pour $x > 0$:

(7) $\sqrt{x} \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{2}(1+x)$

(8) $F(x) = x\, F\left(\frac{1}{x}\right)$

(9) $F(x) = \sqrt{x}\, F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$

(10) $F(x) = \frac{1}{2}(1+x)\, F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

3 - En utilisant les résultats de 2 -

a - Montrer que F est dérivable au point 1 et donner la valeur de $F'(1)$.

b - Montrer que $F(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c - Montrer que F est continue en 0. Est-elle dérivable en ce point ?

d - Étudier les limites éventuelles, lorsque x tend vers $+\infty$, de $\frac{F(x)}{x}$ et $\frac{F(x)}{\sqrt{x}}$.

4 - Pour $x > 0$, exprimer P_n, défini par (1) et (2), en fonction de $F(x)$ et $F(u_{n+1})$.

Retrouver ainsi que la suite (P_n) converge et exprimer sa limite en fonction de $F(x)$.