LYON 1984 ou presque

Nota :

– les parties I, II et III peuvent être traitées de manière indépendante. Dans III, on signale les résultats de II à utiliser.

– IN désigne l'ensemble des entiers naturels et IR celui des nombres réels.

PARTIE I

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions P_n et Q_n définies par

$$Q_n : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\theta \longmapsto Q_n(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} & \text{si } \theta \in]0, \pi[\\ n+1 & \text{si } \theta = 0 \\ (-1)^n (n+1) & \text{si } \theta = \pi \end{cases}$$

$$P_n : [-1, +1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto P_n(x) = Q_n(\operatorname{Arccos} x).$$

1. a. Montrer que Q_n est continue sur $[0, \pi]$ et dérivable sur $]0, \pi[$.

   b. Montrer que P_n est continue sur $[-1, +1]$ et dérivable sur $]-1, +1[$.

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P_n(-1)$, $P_n(0)$, $P_n(1)$.

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P'_n(0)$.

3. a. Pour tout $x \in [-1, +1]$, déterminer $P_0(x)$, $P_1(x)$ et $P_2(x)$.

   b. Montrer que P_n vérifie la relation de récurrence :

   $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall x \in [-1, +1] \quad , \quad P_{n+2}(x) + P_n(x) = 2xP_{n+1}(x).$

   c. En déduire que P_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et la parité.

4. a. Montrer, pour tout $a \in]0, \pi]$, l'existence de l'intégrale

   $$\int_0^a \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\, d\theta .$$

   b. Montrer que l'intégrale

   $$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

   existe et qu'elle est égale à l'intégrale

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\, d\theta .$$

PARTIE II

1. Si a et b sont deux réels vérifiant $a < b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et à dérivée continue sur $[a, b]$, montrer que la suite numérique

   $$\left(\int_a^b f(x) \sin nx \, dx\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

   converge vers 0.

   (On pourra utiliser une intégration par parties). sans blague !

2. On considère la fonction g définie par :

   $$g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$
   $$x \longmapsto g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 . \end{cases}$$

   a. Montrer que g est continue.

   b. Montrer que g est dérivable et que sa dérivée est continue.

PARTIE III

Nota : dans cette partie, on admet l'existence des intégrales $\int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$.

Pour tout n de IN, on considère la fonction φ_n définie par :

$$\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin nx}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ n & \text{si } x = 0 . \end{cases}$$

1. a. Montrer que, pour tout n de IN, φ_n est continue.

b.. Montrer que $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge

montrer que $\int_1^{+\infty} \varphi_1(x)\,dx$ converge (on pourra utiliser une intégration par parties)

dans la suite on pose $L = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

montrer que $\int_1^{+\infty} \varphi_1(x)\,dx$ n'est pas absolument convergente ($\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \geq \sin^2 x$)

2. Pour tout n de IN, on définit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx ,$$

et on pose $J_n = I_{2n}$, $K_n = I_{2n+1}$.

a. Calculer I_0, I_1 et I_2.

b. Calculer, suivant la parité de n, $I_{n+2} - I_n$.
En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de K_n, et, pour $n \geqslant 1$, montrer que $J_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Calculer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

(P_n défini dans la partie I).

c. Montrer que, pour $n \geqslant 1$:

$$J_n - K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2nx \,\mathrm{tg}\, \frac{x}{2}\,dx .$$

En déduire : $\lim_{n\to\infty} (J_n - K_n) = 0$, en utilisant II.

d. Déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et indiquer sa limite.

e. Soit $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que la suite $\left(\int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a même limite que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. On se propose d'établir, pour tout $a > 0$:

(1) $$\lim_{n\to\infty} \int_0^a \varphi_n(x)\,dx = \frac{\pi}{2} .$$

a. Vérifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx .$$

b. Démontrer (1) pour $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
(On pourra considérer $\int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx - \int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$ et appliquer **II**).

c. Démontrer (1) pour $a \in \left]\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$ en montrant que $\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^a \varphi_n(x)\,dx = 0$.

4. Déterminer le nombre L, c'est-à-dire $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx$.