Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1985

MATHEMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Vendredi 17 mai 1985 de 14 heures à 18 heures

Nota :

– les deux problèmes sont indépendants.
– $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs, et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

PREMIER PROBLEME

Soient p un entier naturel $\geqslant 2$, et $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à p (on convient que le polynôme nul est de degré $-\infty$). On note Δ l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans lui-même qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_p[X]$, associe le polynôme ΔP défini par

$$\Delta P(X) = P(X+1) - P(X).$$

PARTIE I

1. a. Vérifier que Δ est une application linéaire.

   b. Quel est le noyau de Δ ?

   c. Déterminer le degré de ΔP en fonction de celui de P, pour tout P de $\mathbb{R}_p[X]$.

2. On définit les polynômes P_n pour tout entier n tel que $0 \leqslant n \leqslant p$, par

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier } n \text{ tel que } 1 \leqslant n \leqslant p : \Delta P_n = P_{n-1} \text{ et } P_n(0) = 0. \end{cases}$$

   a. Calculer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n.

   b. Montrer que la famille $(P_n)_{0 \leqslant n \leqslant p}$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, et que tout polynôme P de $\mathbb{R}_p[X]$ se décompose sous la forme :

$$P = \sum_{n=0}^{p} \alpha_n P_n \quad \text{avec } \alpha_n = (\Delta^n P)(0)$$

   où $\Delta^0 = Id_{\mathbb{R}_p[X]}$ et, pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant p$, $\Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$.

PARTIE II

1. Soit n un entier tel que $1 \leqslant n \leqslant p$.

   a. Montrer que $P_n(X) = \dfrac{1}{n!} X(X-1)\ldots(X-n+1)$.

b. Démontrer que, pour tout k de $\mathbb{Z}$, $P_n(k)$ est dans $\mathbb{Z}$.

c. Prouver, pour tout P de $\mathbb{R}_p[X]$: $\Delta^n P(X) = \sum_{k=0}^{p} C_n^k (-1)^{n-k} P(X+k)$.

2. Démontrer que, pour tout P de $\mathbb{R}_p[X]$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(I) Les composantes de P dans la base $(P_n)_{0 \leqslant n \leqslant p}$ sont dans $\mathbb{Z}$.

(II) Pour tout k de $\mathbb{Z}$, $P(k)$ est dans $\mathbb{Z}$.

PARTIE III

1. a. Écrire la matrice M de Δ dans la base $(P_n)_{0 \leqslant n \leqslant p}$.

b. Calculer M^k pour tout entier naturel k non nul.

2. a. Quelles sont les valeurs propres de M ?

b. Montrer que M n'est pas diagonalisable.

DEUXIEME PROBLEME

Dans tout ce problème, on désigne par f la fonction définie par

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{2x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et par C_f la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

PARTIE I

1. a. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

b. Montrer que f est continue et dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?

c. Préciser la position de C_f par rapport à sa tangente en 0.

2. Soit h la fonction définie par

$h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto h(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} - \frac{x}{2} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^{2x} + 1}.$$

a. Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer qu'il existe un unique réel α strictement positif tel que $h(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

3. a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $h(x)$, pour $x \in \mathbb{R}_*^+$.

b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$, puis sur $\mathbb{R}$.

c. Tracer la représentation graphique C_f de f dans un repère orthonormé. On donnera une valeur approchée des extremums de f à 10^{-1} près.

PARTIE II

1. a. Pour $a > 0$, montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax}\,dx$ converge.

b. Calculer $K(a) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax}\,dx$.

2. a. Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente.

On notera $I = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$f_n(x) = f(x)\,e^{-2nx}$.

Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$. On notera

$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

3. a. Montrer qu'on peut écrire $\dfrac{1 - e^{-2nx}}{1 - e^{-2x}}$ sous forme d'une somme de n termes.

b. Calculer $f(x) - f_n(x)$, et en déduire que

$$I = 2 \sum_{i=0}^{n-1} K(2i+1) + I_n.$$

4. Le but de cette question est de montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On remarque que

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx.$$

a. On considère la fonction φ définie sur $[0,1]$ par

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{2x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que $0{,}4 < \varphi(x) < 1$ pour tout $x \in [0,1]$, puis montrer que, pour tout entier $n > 1$,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx < 2{,}5 \int_0^1 x\,e^{-(2n+1)x}\,dx < \frac{2{,}5}{2n+1}.$$

b. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[1,+\infty[$, on a $0{,}8 < 1 - e^{-2x} < 1$. Montrer que pour tout entier $n > 1$,

$$\int_0^{+\infty} x^2\,e^{-(2n+1)x}\,dx < \frac{2}{2n+1},$$

et en déduire une majoration de $\int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

c. Conclure.