École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1991

MATHÉMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Lundi 6 mai 1991 de 8 heures à 12 heures

1er PROBLÈME

Notations

$\mathscr{B}$ est la base canonique du $\mathbb{C}$ - espace vectoriel $\mathbb{C}^4$, id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}^4$,

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sa matrice relativement à $\mathscr{B}$, g est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice

relativement à $\mathscr{B}$ est $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout $A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$, on note

$M_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{pmatrix}$ et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice relativement à $\mathscr{B}$ est M_A.

Partie A

1. Déterminer les valeurs propres de g et, pour chaque valeur propre de g, déterminer une base du sous-espace propre associé. Est-ce que g est diagonalisable ?

2. Soit $A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$.

   a. Montrer que f_A est combinaison linéaire de id , g , $g \circ g$, $g \circ g \circ g$.

   b. En déduire les valeurs propres de f_A .

c. Dans cette question 2-c., et celle-ci seulement, on suppose $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = -2$. Déterminer pour chaque valeur propre de f_A la dimension du sous-espace propre associé.

Partie B

1. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, tel que $\beta \neq 0$, et $A = (\alpha, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur (α, β) pour qu'il existe $X \in \mathbb{C}^4$ tel que : $f_A(X) = (0, 0, 0, 0)$ et $X \neq (0, 0, 0, 0)$.

2. Trouver quatre nombres complexes α, β, u, v tels que, en notant $A = (\alpha, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta)$ et $B = (u, u + v, u + 2v, u + 3v)$, on ait :

$$\beta \neq 0 \text{ et } u \neq 0 \text{ et } M_A M_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2ème PROBLÈME

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$.

I - Calcul de I_1

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\,dx$ est convergente.

2. Vérifier que, pour tout réel $x \neq -1$,

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right).$$

3. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x^2 - x + 1) - 2\sqrt{3}\,\text{Arc}\tan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Calculer la fonction dérivée de f.
En déduire I_1.

II - Étude de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$ est convergente.

2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$3\,n\,I_{n+1} = (3\,n - 1)\,I_n\,.$$

Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

3. Soient a un nombre réel strictement compris entre 0 et 1 et n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer les trois inégalités suivantes :

$$\int_0^a \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\,dx \leq a\,, \quad \int_a^1 \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\,dx \leq \frac{1-a}{\left(1+a^3\right)^n}\,, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\,dx \leq \frac{1}{3n-1}\,.$$

4. Déduire de la question précédente la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

III - Étude de séries numériques associées à la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

1. On considère les trois suites définies par :
pour $n \geq 1$, $u_n = n^{1/3}\,I_n$, $v_n = \ln u_n$, $w_n = v_{n+1} - v_n$.

   a. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de w_n en fonction de $\dfrac{1}{n}$.

   Quelle est la nature de la série numérique de terme général w_n ?

   b. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un nombre réel h strictement positif. (On ne cherchera pas à calculer h).

   c. Indiquer la nature de la série numérique de terme général I_n.

2. On considère la série numérique de terme général $a_n = (-1)^{n-1}\,I_n$ pour $n \geq 1$.

   a. La série numérique de terme général a_n est-elle absolument convergente ?

   b. Soit $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, pour tout entier $n \geq 1$.

   Vérifier que

$$A_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \dfrac{(-1)^n}{\left(1+x^3\right)^n}}{1 + \dfrac{1}{1+x^3}} \cdot \frac{1}{1+x^3}\,dx\,.$$

   c. Montrer que la série numérique de terme général a_n est convergente.

   d. Soit t un nombre réel strictement positif.
   A l'aide d'un changement de variable simple calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3 + x^3}\,dx$.

   En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.