

# École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1998

## MATHÉMATIQUES

### 1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 4 mai 1998 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

#### Notations :

$E$  désigne l'ensemble des fonctions polynômes réelles.

$n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

$E_n$  désigne l'ensemble des fonctions polynômes réelles de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Pour tout entier naturel non nul  $k$ ,  $X^k$  désigne la fonction polynôme  $t \mapsto t^k$ .

Une fonction polynôme  $P$  non nulle est dite unitaire lorsque son coefficient dominant est égal à 1 (c'est-à-dire que, si  $d$  est le degré de  $P$ , alors  $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_0$ , où  $a_0, a_1, \dots, a_{d-1}$  sont des réels).

#### *PARTIE I : Etude d'un produit scalaire.*

1.a. Montrer que, pour toute fonction polynôme  $P$  de  $E$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt$  est convergente.

b. Pour tout entier naturel  $k$ , on note  $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ .

Déterminer une relation entre  $I_k$  et  $I_{k+1}$ . En déduire que  $I_k = k!$ .

On considère l'application notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $E_n \times E_n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt.$$

2.a. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E_n$ .

b. Pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers naturels inférieurs ou égaux à  $n$ , calculer  $\langle X^i, X^j \rangle$ .

Dans la suite du problème,  $E_n$  est muni de ce produit scalaire.

- 3.a.** Construire une famille orthogonale  $(Q_0, Q_1, Q_2)$  de trois fonctions polynômes telle que pour tout  $k$  de  $\{0, 1, 2\}$ ,  $Q_k$  soit unitaire et de degré  $k$  (on pourra utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt).

On vérifiera que  $Q_2 = X^2 - 4X + 2$ .

- b.** Montrer pour tout couple  $(u, v)$  de réels :

$$\int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2 e^{-t} dt = \langle Q_2, Q_2 \rangle + (u+4)^2 \langle Q_1, Q_1 \rangle + (u+v+2)^2 \langle Q_0, Q_0 \rangle .$$

- c.** Soit  $H$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  qui à tout couple  $(u, v)$  de réels associe l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2 e^{-t} dt .$$

Déduire de la question précédente que  $H$  admet un minimum que l'on calculera.

## PARTIE II : Construction d'une base orthogonale.

Soit  $\Phi$  l'application définie sur  $E_n$  par :

$$\forall P \in E_n, \quad \Phi(P) = XP''(X) + (1-X)P'(X)$$

c'est-à-dire que  $\Phi(P)$  est la fonction polynôme définie pour tout réel  $t$  par :

$$\Phi(P)(t) = tP''(t) + (1-t)P'(t) .$$

- 1.** Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $E_n$  et déterminer la matrice associée à  $\Phi$  relativement à la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  de  $E_n$ .
- 2.a.** Soit  $k \in \{0, \dots, n\}$ . Montrer que la famille  $(\Phi(X^j) + kX^j)_{0 \leq j \leq k}$  est liée.  
En déduire que  $-k$  est valeur propre de  $\Phi$ .
- b.** Montrer que  $\Phi$  est diagonalisable.
- c.** Montrer que la dimension de chaque sous-espace propre est égale à 1.  
En déduire que, pour tout  $k$  appartenant à  $\{0, \dots, n\}$ , il existe une unique fonction polynôme unitaire  $P_k$  vérifiant  $\Phi(P_k) = -kP_k$ .
- d.** Déterminer, pour tout  $k$  appartenant à  $\{0, \dots, n\}$ , le degré de  $P_k$ .
- e.** Vérifier que  $P_0 = Q_0, P_1 = Q_1, P_2 = Q_2$ .

- 3.a.** A l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall (P, Q) \in (E_n)^2, \quad \langle \Phi(P), Q \rangle = - \int_0^{+\infty} t P'(t) Q'(t) e^{-t} dt .$$

Indication : on pourra comparer la dérivée de la fonction  $(t \mapsto tP'(t)e^{-t})$  avec la fonction  $(t \mapsto \Phi(P)(t) e^{-t})$ .

- b.** En déduire que  $\Phi$  est un endomorphisme symétrique de  $E_n$ .
- c.** En déduire que la famille  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une base orthogonale de  $E_n$ .

### PARTIE III : Calcul d'une valeur approchée d'une intégrale.

On note  $a = 2 + \sqrt{2}$  et  $b = 2 - \sqrt{2}$  les deux racines de  $P_2$ .

1.a. Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que, pour toute fonction polynôme  $P$  de degré inférieur ou

égal à 1, on ait : 
$$\int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt = \alpha P(a) + \beta P(b).$$

b. Vérifier : 
$$\int_0^{+\infty} P_2(t) e^{-t} dt = \alpha P_2(a) + \beta P_2(b).$$

c. Soit  $P$  une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Montrer qu'il existe deux fonctions polynômes  $Q$  et  $R$ , chacune de degré inférieur ou égal à 1, telles que  $P = Q P_2 + R$ .

Montrer :  $\langle P_2, Q \rangle = 0$ .

En déduire : 
$$\int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt = \alpha P(a) + \beta P(b).$$

**Dans la suite du problème**, on considère une fonction  $f$  réelle quatre fois dérivable sur  $[0, +\infty[$  et dont la dérivée quatrième  $f^{(4)}$  est continue et bornée sur  $[0, +\infty[$ .

Soit  $M$  un réel tel que :  $\forall t \in [0, +\infty[, |f^{(4)}(t)| \leq M$ .

2.a. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, déterminer une fonction polynôme  $T$  de degré inférieur ou égal à 4 telle que :

$$\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq |f(t)| \leq T(t).$$

En déduire que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-t} dt$  converge.

b. Soit  $D$  l'application de  $E_3$  dans  $\mathbb{R}^4$  définie par :

$$\forall P \in E_3, D(P) = (P(a), P'(a), P(b), P'(b)).$$

Montrer que  $D$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

c. En déduire l'existence d'un unique polynôme  $S$  de  $E_3$  tel que :

$$S(a) = f(a), S'(a) = f'(a), S(b) = f(b), S'(b) = f'(b).$$

3. Soit  $x_0$  un réel positif ou nul, différent de  $a$  et de  $b$ .

On définit la fonction  $g$  sur  $[0, +\infty[$  par :

$$\forall t \in [0, +\infty[, g(t) = f(t) - S(t) - \frac{f(x_0) - S(x_0)}{(P_2(x_0))^2} (P_2(t))^2.$$

a. Vérifier que  $g$  s'annule en  $a$ ,  $b$  et  $x_0$ .

b. En déduire que  $g'$  admet au moins quatre zéros deux à deux distincts (dont  $a$  et  $b$ ), puis qu'il existe  $c \in ]0, +\infty[$  tel que  $g^{(4)}(c) = 0$

(On étudiera avec soin le cas  $a < x_0 < b$  et on expliquera pourquoi les autres cas sont similaires).

c. En déduire : 
$$f(x_0) - S(x_0) = \frac{(P_2(x_0))^2}{4!} f^{(4)}(c) ,$$

puis : 
$$|f(x_0) - S(x_0)| \leq \frac{(P_2(x_0))^2}{4!} M .$$

4.a. Etablir : 
$$\forall x \in [0, +\infty[ , |f(x) - S(x)| \leq \frac{(P_2(x))^2}{4!} M .$$

b. En déduire : 
$$\left| \int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx - \alpha f(a) - \beta f(b) \right| \leq \frac{M}{6} .$$

5. **Application :**

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout  $t$  de  $[0, +\infty[$ , par :  $f(t) = \frac{1}{10+t}$ .

En admettant que  $0.0915 \leq \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2}) + \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) \leq 0.0916$ ,

donner une valeur décimale approchée de  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{10+t} dt$ . On en indiquera la précision.

---