EMLYON
Ecole de Management

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2004

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 3 mai 2004 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

I - Étude de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t$

On note $F :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $G :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad G(x) = \int_1^x \frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u.$$

1 . a. Montrer, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$: $\displaystyle F(x) = -\frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos u}{u^2}\mathrm{d}u.$

En déduire que F admet une limite finie en $+\infty$. On note α cette limite.

b. De manière analogue, montrer que G admet une limite finie en $+\infty$. On note β cette limite.

c. En déduire que, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$ convergent, et que : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = \alpha - F(x)$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u = \beta - G(x)$.

2 . a. Montrer, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$ et tout réel $T \in]0\,;+\infty[$:

$$\int_0^T \frac{\sin t}{t+x}\mathrm{d}t = \cos x \int_x^{x+T} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{x+T} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

b. En déduire que, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\mathrm{d}t = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

On note $A :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, par :

$$A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

3. Montrer que l'application A est de classe C^2 sur $]0\,;+\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$:

$$A''(x) + A(x) = \frac{1}{x}\cdot$$

4. Établir que $A(x)$ et $A'(x)$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

5. a. Montrer : $\quad \forall x \in]0\,;1],\ \ 0 \leqslant \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant -\ln x.$

b. En déduire que $\sin x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

c. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ converge, et établir que $A(x)$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

II - Étude de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$ et tout entier naturel k, l'application $t \longmapsto t^k\,\mathrm{e}^{-xt}$ est bornée sur $[0\,;+\infty[$, et en déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k\,\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

On note, pour tout entier naturel k, $B_k :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, par : $\quad B_k(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k\,\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

2. a. Montrer, en utilisant par exemple l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \ \left|\mathrm{e}^u - 1 - u\right| \leqslant \frac{u^2}{2}\,\mathrm{e}^{|u|}.$$

b. En déduire, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, pour tout entier naturel k et pour tout réel h tel que $0 < |h| \leqslant \dfrac{x}{2}$:

$$\left|\frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2} B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot$$

c. Montrer que, pour tout entier naturel k, B_k est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ \ B_k'(x) = -B_{k+1}(x).$$

d. En déduire que B_0 est de classe C^2 sur $]0\,;+\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$:

$$B_0''(x) + B_0(x) = \frac{1}{x}\cdot$$

3. Montrer, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$:

$$0 \leqslant B_0(x) \leqslant \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant -B_0'(x) \leqslant \frac{1}{x^2},$$

et en déduire les limites de $B_0(x)$ et $B_0'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4.a. Montrer : $\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad e^{-\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant B_0(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt.$

b. Justifier, pour tout réel $y \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\int_0^y du = \int_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2}\,dt,$$

et en déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}.$

c. En déduire la limite de $B_0(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

III - Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$

On considère l'application $\varphi :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, par :

$$\varphi(x) = A(x) - B_0(x),$$

où A a été définie dans la Partie ***I*** et B_0 a été définie dans la Partie ***II***.

On note $U :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, par :

$$U(x) = \big(\varphi(x)\big)^2 + \big(\varphi'(x)\big)^2.$$

1. Montrer que U est constante sur $]0\,;+\infty[$.

2. Quelle est la limite de $U(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

3. En déduire : $\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad A(x) = B_0(x).$

4. Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$?

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles à n lignes.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite positive si et seulement si tous les cœfficients de M sont positifs ou nuls. On notera alors $M \geqslant 0$.
Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite strictement positive si et seulement si tous les cœfficients de M sont strictement positifs. On notera alors $M > 0$.
Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la notation $M \geqslant N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geqslant 0$ (respectivement $M - N > 0$).

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite productive si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes : M est positive et il existe une matrice positive P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$.

I - Étude d'exemples

1. En considérant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer que la matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est productive.

2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas productive.

II - Caractérisation des matrices positives

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, si M est positive, alors, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.

2. Réciproquement, montrer que, si, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif, alors la matrice M est positive.

III - Caractérisation des matrices productives

1. Soit A une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le cœfficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est noté a_{ij} , et P une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $P - AP > 0$. On note $p_1, \ldots, p_n$ les cœfficients de la matrice colonne P.

a. Montrer que $P > 0$.

b. Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geqslant AX$. On note $x_1, \ldots, x_n$ les cœfficients de la matrice colonne X. On désigne par c le plus petit des réels $\dfrac{x_j}{p_j}$ lorsque l'entier j décrit l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et k un indice tel que $c = \dfrac{x_k}{p_k}$.

Établir que $c\left(p_k - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} p_j\right) \geqslant 0$. En déduire que $c \geqslant 0$ et que X est positive.

c. Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$. En remarquant que $-X \geqslant A(-X)$, montrer que X est nulle. En déduire que $I_n - A$ est inversible, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d. Montrer que, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1}X$ est positive (on pourra utiliser ***III.1.b***).
En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

2. Dans cette question, on considère une matrice positive B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ soit inversible et telle que $(I_n - B)^{-1}$ soit positive. On note $V = (I_n - B)^{-1}U$, où U est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les cœfficients sont égaux à 1.
Montrer que $V - BV > 0$. Conclure.

3. Donner une caractérisation des matrices productives.

4. *Application* : Soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$.
Vérifier que $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n$ et en déduire que M est productive.