• On appelle matrice stochastique toute matrice A de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} \forall (i,j) \in \{1,...,p\}^2, & (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in \{1,...,p\}, & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = 1, \end{cases}$

et on note $\mathcal{ST}_p$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$.

Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques - Illustrations

1. **a.** On note V la matrice-colonne à p lignes dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Montrer, pour toute $A \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$: $A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in \{1,...,p\}^2, & (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ AV = V. \end{cases}$

b. En déduire que toutes les matrices de $\mathcal{ST}_p$ ont une valeur propre commune.

2. Démontrer : $\forall A, B \in \mathcal{ST}_p, \quad AB \in \mathcal{ST}_p$.

3. On note : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

a. Justifier, sans calcul, que A_1 est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. Donner la dimension du sous-espace propre pour A_1 associé à la valeur propre 1.

b. En utilisant éventuellement les matrices A_2 et A_3 :

(i) Montrer qu'il existe dans $\mathcal{ST}_3$ au moins un élément non diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$;

(ii) Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « Pour tout élément A de $\mathcal{ST}_3$, le sous-espace propre pour A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 ».

4. Soient $A \in \mathcal{ST}_p$ et λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ.

On note i un élément de $\{1,...,p\}$ tel que : $\forall k \in \{1,...,p\}, \ |x_k| \leqslant |x_i|$.

a. Montrer : $|\lambda x_i| \leqslant |x_i|$.

b. En déduire : $|\lambda| \leqslant 1$.

Partie II : Suites de moyennes de puissances de matrices stochastiques

Soit $A \in \mathcal{ST}_p$. On note $A^0 = \mathrm{I}_p$.

1. **a.** Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n \in \mathcal{ST}_p$.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p$.

Dans la suite de cette partie **II**, on suppose qu'il existe $r \in \{1,...,p-1\}$, $P \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ inversible, $D \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux $(D)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leqslant r$ et distincts de 1 si $i \geqslant r+1$, tels que : $A = PDP^{-1}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D^k$ et $B_n = PM_nP^{-1}$.

On note Δ la matrice de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux $(\Delta)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leqslant r$ et nuls sinon, et on note $B = P\Delta P^{-1}$.

2. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé tel que $|x| \leqslant 1$: $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$

3. Montrer : $M_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \Delta$ et en déduire : $B_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} B$.

4. **a.** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n \in \mathcal{ST}_p$.

b. En déduire : $B \in \mathcal{ST}_p$.

Partie III : Aspect probabiliste

On dispose d'un objet noté T et de trois urnes numérotées 1, 2 et 3.
À chaque instant n ($n \in \mathbb{N}$), T est dans une des trois urnes et une seule.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'urne dans laquelle se trouve l'objet à l'instant n et L_n la matrice suivante de $\mathbf{M}_{1,3}(\mathbb{R})$: $L_n = \Big(\mathrm{P}(X_n = 1) \ \ \mathrm{P}(X_n = 2) \ \ \mathrm{P}(X_n = 3)\Big)$.
On suppose connues la loi de X_0 et la matrice A de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2, \quad (A)_{i,j} = \mathrm{P}_{(X_0=i)}(X_1 = j).$$

On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2, \quad \mathrm{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = \mathrm{P}_{(X_0=i)}(X_1 = j)$.

1. Montrer : $A \in \mathcal{ST}_3$.

2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_{n+1} = L_n A$ puis : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n = L_0 A^n$.

On suppose dorénavant $A = A_1$, définie dans la partie **I.3**, et on note $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer une matrice $P_1 \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telle que $A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$ et calculer P_1^{-1}.

4. Déterminer la limite de la suite $(D_1^n)_{n \geqslant 1}$, puis la limite de la suite $(A_1^n)_{n \geqslant 1}$.

5. Déterminer la limite de la suite $(L_n)_{n \geqslant 1}$. Expliquer ce résultat par des arguments probabilistes.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, J désigne l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

Le but du problème est l'étude de l'application f définie, pour tout x de J, par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Préliminaires

1. Justifier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

2. En admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3. En déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}\cdot$

Partie I : Éléments d'étude de f

1. Justifier, pour tout $x \in J$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

2. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

3. Montrer : $\forall x \in J,\quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x+1}$, et en déduire : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. **a.** Montrer : $\forall (x,y) \in J^2,\quad \forall t \in]0\,;1],\quad \big(\, x \leqslant y \implies t^x \geqslant t^y \,\big)$.

b. En déduire que f est décroissante sur J.

5. Montrer : $\forall x \in J,\quad f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}\cdot$

6. Déduire des résultats précédents : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}\cdot$

7. Soit $x \in J$.

a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\quad f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

b. En déduire que la série numérique $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge et que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

8. **a.** Montrer : $\forall (x,y) \in J^2,\quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \left| \dfrac{1}{k+1+x} - \dfrac{1}{k+1+y} \right| \leqslant |x-y| \dfrac{1}{k^2}$,

puis : $\forall (x,y) \in J^2,\quad |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y| \left(\dfrac{1}{(x+1)(y+1)} + \dfrac{\pi^2}{6} \right)\cdot$

b. En déduire que f est continue sur J.

9. Montrer : $f(x) \underset{x\to-1}{\sim} \dfrac{1}{x+1}$. En déduire la limite de f en -1.

Partie II : Dérivabilité de f

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k l'application de classe C^2 de J dans $\mathbb{R}$ définie pour tout x de J par :

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}\cdot$$

1. Montrer : $\forall (x,y) \in J^2,\quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \big| g_k(x) - g_k(y) - (x-y)\, g_k'(x) \big| \leqslant \dfrac{|x-y|^2}{k^3}\cdot$

2. **a.** Justifier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^3}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} g_k'(x)$, pour tout $x \in J$.

b. En déduire que f est dérivable sur J et que : $\forall x \in J,\quad f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}\cdot$

c. Déterminer $f'(0)$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On donne la valeur approchée : $\ln 2 \approx 0,69$.