Code épreuve : 295

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EMLYON Business School

1ère épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 29 avril 2013 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Partie I : Étude d'une fonction f définie par une intégrale

1. Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$ converge.

On note $f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0;+\infty[$, par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt.$

2. Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[,\quad f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,dt.$ En déduire : $f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$

3. Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[,\quad 0 < f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\cdot$ En déduire : $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$

4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,dt$ converge et que :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\quad \left|f(x) - \frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,dt.$$

En déduire : $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}\cdot$

Tournez la page S.V.P.

Partie II : Une autre expression intégrale de f

A - Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale

5. Soit $(x,h) \in]0;+\infty[\times\mathbb{R}^*$ tel que $h > -\dfrac{x}{2}$.

a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt$ converge.

b. Établir : $\forall t \in [0;+\infty[,\quad \left|\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+t} - \dfrac{1}{x+t}\right) + \dfrac{1}{(x+t)^2}\right| \leqslant \dfrac{2|h|}{x^3}$.

c. En déduire : $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt\right| \leqslant \dfrac{2|h|}{x^3}$.

6. En déduire que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $\forall x \in]0;+\infty[,\quad f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt$.

7. Montrer, pour tout $x \in]0;+\infty[$ et tout $(\varepsilon, A) \in]0;1] \times [1;+\infty[$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt.$$

8. En déduire : $\forall x \in]0;+\infty[,\quad f'(x) = -\dfrac{1}{x} + f(x)$.

9. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et que : $\forall x \in]0;+\infty[,\quad f''(x) = \dfrac{1}{x^2} + f'(x)$.

B - Intervention d'une fonction auxiliaire g

On note $g :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0;+\infty[$, par : $g(x) = e^{-x} f(x)$.

10. Démontrer que g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $\forall x \in]0;+\infty[,\quad g'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x}$.

11. Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$ converge et que :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\quad g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du,$$

puis : $\forall x \in]0;+\infty[,\quad f(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$.

12. Montrer : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

13. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$?

Partie III : Étude d'une densité

On note $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par : $h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(1)} \dfrac{e^{-t}}{1+t} & \text{si } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$

14. Montrer que h est une densité.

15. Soit X une variable aléatoire réelle admettant h pour densité. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$ à l'aide de $f(1)$.