(Q1) a) Posons $g = \frac{f_1^2+f_2^2}{2}$. g est continue et positive sur $]0,a]$.

$\int_0^a f_1^2(t)dt$ et $\int_0^a f_2^2(t)dt$ sont convergentes car $f_1 \in L_2(a)$ et $f_2 \in L_2(a)$; par conséquent $\int_0^a g(t)dt$ est convergente comme "combinaison linéaire d'intégrales convergentes".

Ceci achève alors de prouver que : $g = \frac{f_1^2+f_2^2}{2} \in L_1(a)$.

$h = f_1 f_2$ est continue et positive sur $]0,a]$ comme produit de deux fonctions continues et positives sur $]0,a]$.

$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

$0 \leq (f_1 f_2)(t) \leq \frac{f_1^2(t)+f_2^2(t)}{2}$ pour tout $t \in]0,a]$. $\forall t \in]0,a]$, $0 \leq h(t) \leq g(t)$.

La convergence de $\int_0^a g(t)dt$ et la positivité de $h = f_1 f_2$ donnent la convergence de $\int_0^a h(t)dt$

Finalement : $h = f_1 f_2 \in L_1(a)$.

b) Soit f un élément de $L_2(a)$. Posons $f_1 = f$ et $\forall t \in]0,a]$, $f_2(t) = 1$.

Par hypothèse f_1 est un élément de $L_2(a)$ et clairement : $f_2 \in L_2(a)$.

Ce qui précède donne alors : $f = f \times 1 = f_1 f_2 \in L_1(a)$.

$\forall f \in L_2(a)$, $f \in L_1(a)$. $L_2(a) \subset L_1(a)$.

(Q2) a) Nous allons d'abord faire une étude complète de la convergence de $\int_0^1 f_{p,q}(t)dt$.

Notons que $f_{p,q}$ est continue sur $]0,1]$ donc localement intégrable ; notons aussi que $f_{p,q}$ garde un signe constant sur $]0,1]$ (positif si q est pair et négatif si q est impair).

Par conséquent $\int_0^1 f_{p,q}(t)dt$ et $\int_0^1 |f_{p,q}(t)|dt$ sont de même nature. Nous étudions donc la convergence de cette dernière intégrale.

Envisageons alors trois cas : $p > 1$, $p = 1$ et $p = 0$.

1er Cas.. $p>1$. $\lim_{t\mapsto 0} |f_{p,q}(t)|=0$; $|f_{p,q}|$ est prolongeable par continuité en 0 et donc

$\int_0^1 |f_{p,q}(t)|\,dt$ converge.

2ème Cas.. $p=1$ $\lim_{t\mapsto 0} \sqrt{t}\,|f_{p,q}(t)| = \lim_{t\mapsto 0} (\sqrt{t}\,|\ln t|^q)=0$

$\exists \alpha\in]0,1],\ \forall t\in]0,\alpha],\quad 0\leq \sqrt{t}\,|\ln t|^q \leq 1$

$\forall t\in]0,\alpha],\ 0\leq |\ln t|^q\leq \frac{1}{\sqrt{t}}$. $\forall t\in]0,\alpha],\ 0\leq |f_{p,q}(t)|\leq \frac{1}{\sqrt{t}}$

La convergence de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ et la positivité de $|f_{p,q}|$ donnent alors la convergence de $\int_0^1 |f_{p,q}(t)|\,dt$.

3ème Cas.. $p=0$

$\forall t\in]0,\frac{1}{e}],\quad |\ln t|\geqslant 1$

$\forall t\in]0,\frac{1}{e}],\quad |f_{p,q}(t)| = \frac{1}{t}|\ln t|^q \geqslant \frac{1}{t}\geqslant 0$

La divergence de $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ et les règles de comparaison des intégrales généralisées des fonctions positives montrent que $\int_0^1 |f_{p,q}(t)|\,dt$ diverge.

Finalement : $\int_0^1 |f_{p,q}(t)|\,dt$ converge si et seulement si $p\geqslant 1$.

Donc d'après ce que nous avons dit plus haut : $\int_0^1 f_{p,q}(t)\,dt$ converge si et seulement si $p\geqslant 1$.

Il est grand temps de répondre à la question !

Notons que $f_{p,q}$ est continue sur $]0,1]$. Par conséquent :

$$f_{p,q}\in L_2(I) \Leftrightarrow \begin{cases}\forall t\in]0,1],\ f_{p,q}(t)= t^{p-1}(\ln t)^q\geqslant 0\\ \text{et}\\ \int_0^1 t^{2p-2}(\ln t)^{2q}\,dt \geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\forall t\in]0,1],\ (\ln t)^q\geqslant 0\\ \text{et}\\ (2p-2)+1\geqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q \text{ est pair}\\ \text{et}\\ p\geqslant 1\end{cases}$$

Par conséquent : $f_{p,q}\in L_2(I) \Leftrightarrow p\in \mathbb{N}^*$ et q est un élément pair de $\mathbb{N}$.

b) Soit donc $p\in\mathbb{N}^*$ et q un entier naturel pair. Notons que le calcul qui suit n'utilise pas la parité de q.

Donnons deux manières de calculer $I_{pq}=\int_0^1 f_{p,q}(t)\,dt$ qui converge car

$f_{pq} \in L_2(a)$ donc $f_{pq} \in L_1(a)$!!

(V1). Vers la fonction Γ.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\displaystyle\int_\varepsilon^1 f_{p,q}(t)\,dt = \int_\varepsilon^1 t^{p-1}(\ln t)^q\,dt = \int_\varepsilon^1 t^p \,\frac{1}{t}(\ln t)^q\,dt$

$$\int_\varepsilon^1 f_{pq}(t)\,dt \underset{\boxed{v=-p\ln t}}{=} \int_{-p\ln\varepsilon}^{0} \left(e^{-v/p}\right)^p\left(-\frac{v}{p}\right)^q\left(-\frac{1}{p}\right)dv = \frac{(-1)^q}{p^{q+1}}\int_0^{-p\ln\varepsilon} v^q e^{-v}\,dv$$

$$\begin{cases} v = -p\ln t \\ dv = -p\,\frac{1}{t}\,dt \\ t = e^{-v/p}\end{cases}$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(-p\ln\varepsilon) = +\infty$ donc $\displaystyle\int_0^1 f_{p,q}(t)\,dt = \frac{(-1)^q}{p^{q+1}}\int_0^{+\infty} v^{q+1-1}e^{-v}\,dv = \frac{(-1)^q\,\Gamma(q+1)}{p^{q+1}}$

Par conséquent : $\displaystyle\underline{\int_0^1 f_{p,q}(t)\,dt = \frac{(-1)^q\, q!}{p^{q+1}}}$.

(V2) Récurrence.. Rappelons que nous avons montré l'existence de I_{pq} pour tout p dans $\mathbb{N}^*$ et tout q dans $\mathbb{N}$. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\displaystyle\int_\varepsilon^1 f_{p,q}(t)\,dt = \int_\varepsilon^1 \underbrace{t^{p-1}}_{u'}\underbrace{(\ln t)^q}_{v}\,dt = \left[\frac{t^p}{p}(\ln t)^q\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^p}{p}\times q\,\frac{1}{t}(\ln t)^{q-1}\,dt$

$$\int_\varepsilon^1 f_{pq}(t)\,dt = -\frac{\varepsilon^p(\ln\varepsilon)^q}{p} - \frac{q}{p}\int_\varepsilon^1 f_{p,q-1}(t)\,dt.$$

Comme $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^p(\ln\varepsilon)^q = 0$ on obtient : $I_{p,q} = -\dfrac{q}{p}\,I_{p,q-1}$ pour $p\in\mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{(-1)^q p^q}{q!}I_{p,q} = (-1)^{q+1}\frac{p^q}{p}\,\frac{q}{q!}\,I_{p,q-1} = (-1)^{q-1}\frac{p^{q-1}}{(q-1)!}\,I_{p,q-1}.$$

Petite facétie qui évite la récurrence.

Ceci prouve que si nous fixons p dans $\mathbb{N}^*$, la suite $\left(\dfrac{(-1)^q p^q}{q!}I_{p,q}\right)_{q\geq 0}$ est constante

donc $\forall q\in\mathbb{N}$, $\dfrac{(-1)^q p^q}{q!}I_{p,q} = I_{p,0} = \displaystyle\int_0^1 t^{p-1}\,dt = \frac{1}{p}$ et ceci pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.

$\forall q \in \mathbb{N}$, $I_{pq} = \dfrac{(-1)^q\, q!}{p^{q+1}}$ et ceci pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

Finalement : $\underline{\underline{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall q \in\mathbb{N},\ I_{p,q} = \dfrac{(-1)^q q!}{p^{q+1}}}}$.

Manque la page 4

Remarque.- T_n est donc un estimateur sans biais convergent de J.

PARTIE II

(Q1) a) $i \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons $\hat{g}(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ et $\hat{g}(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} - [0,1]$. $\hat{g}$ est une densité de X.
$\hat{g}$ diffère de g d'un nombre fini de points.
Par conséquent : $E(Y) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \overset{\text{?}}{=} \int_0^1 f(x)\hat{g}(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx = I$.

Par conséquent $E(Y_i) = I$ et $E(Z_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E(Y_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I = I$

$E(Y_i) = E(Z_n) = I$.
Par conséquent Y_i et Z_n satisfont à la condition "$C_1(I)$".

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} Y_i$ et Z_n satisfait à "$C_1(I)$".

D'après I Q2, Z_n satisfait à la condition "$C_2(V(Y))$" si et seulement si :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{2}$. $\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\right) = C_n^2\frac{1}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n-1}{2n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$; Z_n satisfait à "$C_2(V(Y))$"

> On pouvait aussi remarquer que $V(Z_n) = \frac{1}{n}V(Y)$!

c) Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

$E[(Y_i - Z_n)^2] \underset{\uparrow}{=} E\left[(Y_i-I)^2 - 2(Y_i-I)(Z_n-I) + (Z_n-I)^2\right] = E[(Y_i-I)^2] - 2E[(Y_i-I)(Z_n-I)] + E[(Z_n-I)^2]$.

$Y_i - Z_n = (Y_i - I) - (Z_n - I)$

$E[(Y_i-Z_n)^2] \underset{\uparrow}{=} V(Y_i) - 2\,\mathrm{cov}(Y_i, Z_n) + V(Z_n)$

$$\begin{cases} V(Y_i) = E[(Y_i - E(Y_i))^2] = E[(Y_i-I)^2] \text{ même chose pour } V(Z_n) \\ \mathrm{cov}(Y_i, Z_n) = E\big((Y_i - E(Y_i))(Z_n - E(Z_n))\big) = E\big((Y_i - I)(Z_n - I)\big) \end{cases}$$

Notons encore que : $\mathrm{cov}(Y_i, Z_n) = \mathrm{cov}\left(Y_i, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{cov}(Y_i, Y_j)$

or $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ V(Y_i) & \text{si } j = i \end{cases}$

donc $\mathrm{cov}(Y_i, Z_n) = \frac{1}{n}V(Y_i)$. Par conséquent $E[(Y_i - Z_n)^2] = V(Y_i) - \frac{2}{n}V(Y_i) + V(Z_n)$.

Or $V(Z_n) = V\left(\frac{1}{n}(Y_1+Y_2+\dots+Y_n)\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = \frac{1}{n^2} \times n V(Y_i) = \frac{1}{n} V(Y_i)$!

$V(Y_i) = n V(Z_n)$ par indépendance

Donc $E[(Y_i - Z_n)^2] = n V(Z_n) - \frac{2}{n} n V(Z_n) + V(Z_n) = (n-1) V(Z_n)$.

Finalement : $V(Z_n) = \frac{1}{n-1} E[(Y_i - Z_n)^2]$.

Q2 Bienaymé-Tchebychev donne : $p\left(|Z_n - E(Z_n)| > 10\sqrt{\frac{V(Y)}{n}}\right) \leq \frac{V(Z_n)}{\left(10\sqrt{\frac{V(Y)}{n}}\right)^2}$

$V(Z_n) = \frac{1}{n} V(Y_i) = \frac{1}{n} V(Y)$ donc $\frac{V(Z_n)}{\left(10\sqrt{\frac{V(Y)}{n}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n}V(Y)}{100\frac{V(Y)}{n}} = \frac{1}{100} = 0,01$.

Donc $p\left(|Z_n - E(Z_n)| > 10\sqrt{\frac{V(Y)}{n}}\right) \leq 0,01$

ce qui donne : $p\left(|Z_n - E(Z_n)| \leq 10\sqrt{\frac{V(Y)}{n}}\right) = 1 - p\left(|Z_n - E(Z_n)| > 10\sqrt{\frac{V(Y)}{n}}\right) \geq 1 - 0,01 = 0,99$.

$p\left(|Z_n - E(Z_n)| \leq 10\sqrt{\frac{V(Y)}{n}}\right) \geq 0,99$.

Q3 Rappelons que : $\sigma(Z_n) = \sqrt{V(Z_n)} = \sqrt{\frac{V(Y)}{n}}$.

Soit $a \in \mathbb{R}^*_+$.

$p\left(|Z_n - I| \leq a\sqrt{\frac{V(Y)}{n}}\right) = p\left(\left|\frac{Z_n - I}{\sqrt{V(Z_n)}}\right| \leq a\right) = p\left(\left|\frac{Z_n - I}{\sigma(Z_n)}\right| \leq a\right)$

Notons Z_n^* la variable aléatoire centrée réduite associée à Z_n. $Z_n^* = \frac{Z_n - I}{\sigma(Z_n)}$.

On considère que : $Z_n^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Notons ϕ la fonction de répartition de Z_n^*.

Donc $p\left(|Z_n - I| \leq a\sqrt{\frac{V(Y)}{n}}\right) = p(|Z_n^*| \leq a) = 2\phi(a) - 1$

Pour avoir $p\left(|Z_n - I| \leq a\sqrt{\frac{V(Y)}{n}}\right) > 0,99$ il suffit d'avoir $2\phi(a) - 1 > 0,99$;

c'est à dire $\phi(a) > \frac{1,99}{2} = 0,995$.

La table nous donne $\phi(2,57) \simeq 0,9949$ et $\phi(2,58) \simeq 0,9951$

Donc pour avoir $\phi(a) > 0,995$ il suffit de prendre $a \geq 2,58$

Toute valeur a de l'intervalle $[2,58\,;\,10[$ convient.

PARTIE III

(Q1) Soit $j \in [\![1,k]\!]$. Nous pouvons prendre comme densité de X^j la fonction $\hat{g}_j$ définie par : $\forall t \in [a_j, a_{j+1}]$, $\hat{g}_j(t) = \frac{1}{a_{j+1}-a_j}$ et $\forall t \in \mathbb{R}-[a_j,a_{j+1}]$, $\hat{g}_j(t)=0$.

g_i et $\hat{g}_j$ diffèrent d'un nb fini de pts

On a alors $E(Y^j) = (a_{j+1}-a_j)\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)\hat{g}_j(x)\,dx = \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)\,dx = I_j$.

Par conséquent $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $E(Y_i^j) = I_j$

$$E(Z^j_{n_j}) = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} E(Y_i^j) = \frac{1}{n_j} \times n_j I_j = I_j .$$

Donc pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, Y_i^j satisfait la condition " $C_1(I_j)$ " ; il en est de même pour $Z^j_{n_j}$

$$Z^j_{n_j} = \sum_{i=1}^{n_j} \frac{1}{n_j} Y_i^j$$

$$\lim_{n_j \to +\infty} \sum_{1\le k<\ell\le n_j}\left(\frac{1}{n_j}\right)\left(\frac{1}{n_j}\right) = \lim_{n_j\to+\infty} C_{n_j}^2 \frac{1}{n_j^2} = \lim_{n_j\to+\infty} \frac{n_j(n_j-1)}{2n_j^2} = \frac{1}{2}.$$

$Z^j_{n_j}$ satisfait donc aux conditions " $C_1(I_j)$ " et " $C_2[V(Y^j)]$ " d'après I.2.

(Q2) $E(Z_n^*) = \sum_{j=1}^{k} E(Z^j_{n_j}) = \sum_{j=1}^{k} E(Y^j) = \sum_{j=1}^{k} I_j = \sum_{j=1}^{k}\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = I.$

$$\underline{\underline{E(Z_n^*) = I.}}$$

(Q3) $V(Z_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = \frac{1}{n^2}\times n V(Y) = \frac{1}{n}\left(E(Y^2)-(E(Y))^2\right).$

$$n V(Z_n) = \int_0^1 f^2(x)\hat{g}(x)\,dx - \left(\int_0^1 f(x)\hat{g}(x)\,dx\right)^2 = \int_0^1 f^2(x)\,dx - I^2$$

$$\underline{\underline{nV(Z_n) = \int_0^1 f^2(x)\,dx - I^2.}}$$

Par indépendance : $V(Z_n^*) = \sum_{j=1}^{k} V(Z^j_{n_j}) = \sum_{j=1}^{k} V\left(\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} Y_i^j\right) \overset{\text{Toujours l'indépendance}}{=} \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j^2}\sum_{i=1}^{n_j} V(Y_i^j)$

$V(Z_n^*) = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j^2} n_j V(Y^j) = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j} V(Y^j)$. $V(Y^j) = E((Y^j)^2) - (E(Y^j))^2$.

$$V(Y^j) = (a_{j+1}-a_j)^2 \int_{a_j}^{a_{j+1}} f^2(x) \frac{1}{a_{j+1}-a_j} \, dx - (E(Y^j))^2$$

$$V(Y^j) = (a_{j+1}-a_j) \int_{a_j}^{a_{j+1}} f^2(x)\, dx - I_j^2 = \frac{n_j}{n} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f^2(x) dx - I_j^2 .$$

$$V(Z_n^*) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j} V(Y_j) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j} \left[\frac{n_j}{n} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f^2(x) dx - I_j^2 \right]$$

$$V(Z_n^*) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f^2(x) dx - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j} I_j^2 = \frac{1}{n} \int_0^1 f^2(x) dx - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j} I_j^2$$

$$n V(Z_n^*) = \int_0^1 f^2(x) dx - \sum_{j=1}^{k} \frac{n}{n_j} I_j^2 .$$

$$n(V(Z_n) - V(Z_n^*)) = \int_0^1 f^2(x) dx - I^2 - \int_0^1 f^2(x) dx + \sum_{j=1}^{k} \frac{n}{n_j} I_j^2$$

$$n(V(Z_n) - V(Z_n^*)) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_{j+1}-a_j} I_j^2 - I^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_{j+1}-a_j} \left(\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{k} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx \right)^2$$

Montrer que : $V(Z_n) \geq V(Z_n^*)$, revient à prouver que $\left(\sum_{j=1}^{k} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_{j+1}-a_j} \left(\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx \right)^2$

Rappelons que : $\forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k, \forall (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^k, \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \beta_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2 \sum_{j=1}^{k} \beta_j^2$

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{k} \left(\sqrt{a_{j+1}-a_j} \times \frac{1}{\sqrt{a_{j+1}-a_j}} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx \right) \right)^2$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{k} \sqrt{a_{j+1}-a_j}^{\,2} \right) \left(\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{\sqrt{a_{j+1}-a_j}} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx \right)^2 \right)$$

$$\leq \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{k} (a_{j+1}-a_j) \right)}_{=1} \left(\sum_{j=1}^{k} \left(\left(\frac{1}{a_{j+1}-a_j} \right) \left(\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx \right)^2 \right) \right)$$

donc $\left(\sum_{j=1}^{k} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{a_{j+1}-a_j} \left(\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx \right)^2 \right)$ donc $\underline{\underline{V(Z_n) \geq V(Z_n^*)}}$.

$\lim_{n \to +\infty} V(Z_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left(\int_0^1 f^2(x) dx - \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \right) = 0$ donc $\underline{\underline{\lim_{n \to +\infty} V(Z_n^*) = 0}}$

PARTIE IV

désolé mais le théorème de transfert de notre programme ne permet pas d'obtenir le résultat car f n'est pas strictement monotone sur $[0,1]$.
Nous ne donnerons donc le résultat.
Néanmoins indiquons de quelle manière on peut obtenir une valeur approchée de I à l'aide de II.
On tire au hasard n fois un nombre sur l'intervalle $[0,1]$ et ce de manière indépendante.
Soit X_i la variable aléatoire égale au résultat du $i^{ème}$ tirage.
$X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes.
Posons $Y_i = f(X_i)$.
D'après II $Z_n = \frac{1}{n}(Y_1+Y_2+\dots+Y_n)$ converge en probabilité vers I.
D'où l'idée de l'algorithme consistant à tirer n fois un nombre au hasard dans l'intervalle $[0,1]$ et de prendre comme approximation de I la moyenne des images par f des résultats obtenus.
III propose un raffinement de cet algorithme. On subdivise l'intervalle $[0,1]$ en k intervalles et on applique la méthode sur ces k intervalles.

```
(*Méthode de Monte Carlo*)

program escp81;
uses crt,printer;
var i,n:integer;s,x:real;

function f(ixe:real):real;

begin
f:=ixe*ixe*sqr(ln(ixe));
end;

begin

randomize;

write('Donnez n. n=');readln(n);writeln;


s:=0;
for i:=1 to n do
    begin
    x:=random;s:=s+f(x);
    end;
writeln('Une valeur approchée de I est : ',s/n);
writeln('La valeur exacte (ou presque) est :',2/27);
end.
```

Ici $p=q=2$.

p10

```
Donnez n. n=5000

Une valeur approchée de I est :  7.4476562515E-02
La valeur exacte (ou presque) est : 7.4074074074E-02

Donnez n. n=3000

Une valeur approchée de I est :  7.3654641875E-02
La valeur exacte (ou presque) est : 7.4074074074E-02

Donnez n. n=50

Une valeur approchée de I est :  8.0567086603E-02
La valeur exacte (ou presque) est : 7.4074074074E-02

Donnez n. n=100

Une valeur approchée de I est :  7.4670558327E-02
La valeur exacte (ou presque) est : 7.4074074074E-02

Donnez n. n=400

Une valeur approchée de I est :  7.4345415748E-02
La valeur exacte (ou presque) est : 7.4074074074E-02
```

Mouvais !

Avec la subdivision en intervalles (lui de même longueur) ↓ c'est mieux !

```
Donnez n. n=500
Donnez le nombre d'intervalles k. k=10

Une valeur approchée de I est :  7.4064078713E-02
La valeur exacte (ou presque) est : 7.4074074074E-02

Donnez n. n=10
Donnez le nombre d'intervalles k. k=500

Une valeur approchée de I est :  7.4073180586E-02
La valeur exacte (ou presque) est : 7.4074074074E-02

Donnez n. n=100
Donnez le nombre d'intervalles k. k=100

Une valeur approchée de I est :  7.4085350531E-02
La valeur exacte (ou presque) est : 7.4074074074E-02
```

Petit recouvrement pour éviter une page suppl. ↓

```
(*Méthode de Monte Carlo a

program escp81;
uses crt,printer;
var i,j,n,k:integer;s,t,x:

function f(ixe:real):real;

begin
f:=ixe*ixe*sqr(ln(ixe));
end;

begin

randomize;

write('Donnez n. n=');readln(n);
write('Donnez le nombre d''intervalles k. k=');readln(k);writeln;

t:=0;
for j:=0 to k-1 do
    begin
    s:=0;
    for i:=1 to n do
        begin
        x:=(random+j)/k;s:=s+f(x);
        end;
    t:=t+s/n/k;
    end;
writeln('Une valeur approchée de I est : ',t);
writeln('La valeur exacte (ou presque) est :',2/27);
end.
```