CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS - CENTRE PARISIEN DE MANAGEMENT

escp

ÉCOLE SUPÉRIEURE
DE COMMERCE
DE PARIS
79, avenue de la république
75011 paris - tél.: 355.39.08

CONCOURS D'ENTRÉE 1981

Mathématiques 1re épreuve

SAMEDI 9 MAI DE 8 H A 12 H

Durée 4 heures

PREAMBULE

Dans ce problème :

- on note N_n^* l'ensemble des n premiers entiers naturels non nuls ;
- on appelle "suite associée à une variable aléatoire réelle X" (X étant quelconque), une suite infinie $\{X_i\}$ de variables aléatoires réelles X_i ($i \in N^*$) de même loi de probabilité que X, telles que pour tout $n \in N^*$, les n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$ soient indépendantes.

PARTIE PRELIMINAIRE

Soit $a > 0$ un réel donné.

Soit $L_1(a)$ l'ensemble des fonctions numériques f, continues sur $]0, a]$, à valeurs positives, telles que l'intégrale :

$$\int_0^a f(x)dx \text{ converge ;}$$

et soit $L_2(a)$ l'ensemble des fonctions numériques f, continues sur $]0, a]$, à valeurs positives, telles que l'intégrale :

$$\int_0^a f^2(x)dx \text{ converge.}$$

1/ a/ Montrer que si f_1 et f_2 sont deux éléments de $L_2(a)$, $\dfrac{(f_1^2 + f_2^2)}{2}$ et le produit $f_1 \cdot f_2$ sont éléments de $L_1(a)$.

b/ En déduire que $L_2(a)$ est inclus dans $L_1(a)$.

2/ p et q étant des entiers naturels donnés, on considère la fonction réelle $f_{p,q}$ de la variable réelle x définie pour x strictement positif par :

$$f_{p,q}(x) = x^{p-1}(\text{Log } x)^q$$

a/ A quelle condition nécessaire et suffisante notée "C_o" $f_{p,q}$ est-elle élément de $L_2(1)$?

b/ La condition "C_o" étant réalisée, calculer :

$$I_{p,q} = \int_0^1 f_{p,q}(x)\,dx.$$

PARTIE I

Soit X une variable aléatoire réelle, ayant une espérance mathématique $E(X) = \mu \neq 0$ et une variance $V(X) = \sigma^2 > 0$.

On considère la suite $\{X_i\}$ associée à X ainsi que la suite de variables aléatoires $\{T_n\}$ dont les éléments sont définis quel que soit $n \in N^*$ par :

$T_n = \alpha_{1n} X_1 + \alpha_{2n} X_2 + \ldots + \alpha_{in} X_i + \ldots + \alpha_{nn} X_n$

où les coefficients α_{in}, $(i \in N_n^*)$ sont des réels positifs ou nuls.

1/ A quelle condition nécessaire et suffisante notée "$C_1(\mu)$" a-t-on :

$$E(T_n) = \mu \quad ?$$

2/ La condition "$C_1(\mu)$" étant réalisée, montrer qu'une condition nécessaire et suffisante notée "$C_2(\sigma^2)$" pour que $\lim\limits_{n\to\infty} V(T_n) = 0$ est :

"$C_2(\sigma^2)$" : $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} \alpha_{in} \cdot \alpha_{jn} = 1/2$

3/ Les conditions "$C_1(\mu)$" et "$C_2(\sigma^2)$" étant réalisées, vers quelle valeur t_0 la suite de variables aléatoires $\{T_n\}$ converge-t-elle en probabilité ?

Les indices p et q, définis dans le préliminaire, satisfaisant à la condition "C_o" sont maintenant fixés. On pose $f_{p,q} = f$ et $I_{p,q} = I$.

PARTIE II

Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité est la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$. On notera g sa fonction densité de probabilité.

On admettra qu'il existe une variable aléatoire réelle Y dont l'espérance mathématique et le moment d'ordre 2 sont donnés respectivement par :

$$E(Y) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \quad \text{et} \quad E(Y^2) = \int_0^1 f^2(x)\, g(x)\, dx.$$

Soit $\{Y_i\}$ la suite associée à Y, on pose :

$$\forall n \in N^*,\ Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

1/ a/ Montrer que, quels que soient les entiers i et n, Y_i et Z_n satisfont à la condition "$C_1(I)$".

b/ Montrer que Z_n satisfait à la condition "$C_2[V(Y)]$".

c/ Montrer que, quel que soit $i \in N_n^*$: $V(Z_n) = \frac{1}{n-1} E[(Y_i - Z_n)^2]$

2/ Montrer que l'inégalité :

$$|Z_n - I| \leqslant 10\sqrt{\frac{V(Y)}{n}}$$

est satisfaite avec une probabilité au moins égale à 0,99.

3/ Lorsque n est suffisamment grand, on peut admettre que la variable aléatoire centrée réduite associée à Z_n a pour loi de probabilité la loi normale centrée réduite. Sous cette hypothèse, montrer que l'on peut améliorer l'inégalité précédente, c'est-à-dire trouver :

$a < 10$ et $P > 0,99$ tels que :

$$Pr\left(|Z_n - I| \leqslant a\sqrt{\frac{V(Y)}{n}}\right) \geqslant P$$

PARTIE III

Nota : dans cette partie la notation X^j signifie "X indice j" et NON "X puissance j".

On subdivise l'intervalle $]0, 1]$ en k sous-intervalles non vides $]a_j, a_{j+1}]$ disjoints tel que : $\bigcup_{j=1}^{k}]a_j, a_{j+1}] =]0, 1]$

A chaque intervalle $]a_j, a_{j+1}]$ on associe :

- le nombre $I_j = \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)\,dx$;
- la variable aléatoire X^j de loi de probabilité uniforme sur celui-ci (on notera g_j sa densité de probabilité) ;
- la suite $\{X_i^j\}$ associée à X^j $(i \in N^*)$;
- la variable aléatoire Y^j, dont on admettra l'existence, ayant pour espérance mathématique et pour moment d'ordre 2 :

$$E(Y^j) = (a_{j+1} - a_j)\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)\, g_j(x)\, dx$$

$$E\left[(Y^j)^2\right] = (a_{j+1} - a_j)^2\int_{a_j}^{a_{j+1}} f^2(x)\, g_j(x)\, dx$$

- la suite $\{Y_i^j\}$ associée à Y^j $(i \in N^*)$
- la variable aléatoire $Z_{n_j}^j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} Y_i^j$, $(n_j \in N^*)$.

On pose $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$ et on suppose que les variables aléatoires :

- X^j, $j \in N_k^*$ sont indépendantes ;
- Y_i^j, $i \in N_{n_j}^*$, $j \in N_k^*$ sont indépendantes ;
- $Z_{n_j}^j$, $j \in N_k^*$ sont indépendantes.

1/ Montrer que, quels que soient les entiers n_j, i, j : Y_i^j et $Z_{n_j}^j$ satisfont à la condition "$C_1(I_j)$" et que $Z_{n_j}^j$ satisfait à la condition "$C_2\, [V(Y^j)]$".

2/ On considère la variable aléatoire $Z_n^* = \sum_{j=1}^{k} Z_{n_j}^j$

Montrer que $E(Z_n^*) = I$.

3/ On suppose que pour tout $j \neq 1$ et $j \in N_k^*$: $\quad na_j \in N^*$

a/ démontrer que si $\forall\, j \in N_k^*$, $n_j = (a_{j+1} - a_j)n$ alors $V(Z_n) \geqslant V(Z_n^*)$.

b/ En déduire que $\lim_{n \to \infty} V(Z_n^*) = 0$.