ESCP 85 QUELQUES INDICATIONS SUR LE DM2

Ⓐ

Q1.. $\frac{g_1'}{g_1}$ est définie sur $]0,+\infty[-\{1\}$. $\forall x\in]0,+\infty[-\{1\}$, $\frac{g_1'}{g_1}(x)=\frac{-x^2\ln a+x(2+\ln a)-1}{x(x-1)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\ln a$

$\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $\left(\frac{g_1'}{g_1}\right)'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}<0$

x	0		1		$+\infty$
$(g_1'/g_1)'$	‖	$-$	‖	$-$	
g_1'/g_1	‖	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \longrightarrow$	$-\ln a$

Les zéros de $\frac{g'}{g_1}$ sont : $u=\frac{2+\ln a-\sqrt{4+\ln^2 a}}{2\ln a}$ et

$v=\frac{2+\ln a+\sqrt{4+\ln^2 a}}{2\ln a}$ (résolution de $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$ et $-x^2\ln a+x(2+\ln a)-1=0$)

Remarque.. Il n'est pas nécessaire de montrer que les zéros de l'équation $x\in\mathbb{R}$ et $-x^2\ln a+x(2+\ln a)-1=0$ sont dans $]0,1[\cup]1,+\infty[$ car il est clair que g_1'/g_1 s'annule exactement deux fois sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ (continuité et stricte monotonie sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ ...)

Etude de g_1 : g_1 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. $g_1(0)=0$ et $\lim_{x\to+\infty}g_1(x)=0$

x	0		u		1		v		$+\infty$
$g_1'(x)/g_1(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$g_1(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g_1'(x)$		$-$ 0 $+$			①	$+$	0	$-$	
	0	$\searrow$	$\tilde A$	$\nearrow$			$\tilde B$	$\searrow$	0

$\tilde A=g(u)$ et $\tilde B=g(v)$

Branche infinie. La droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}_1$ de g_1.

Q2 $u\simeq 0,41581$; $v\simeq 3,46958$ $(3,469377153)$.
$g(u)\simeq -0,18209$; $g(v)\simeq 0,77349$ $(0,7734858135)$.

Ⓑ

Q1.. Majoration de $|R_1(k,n)|$ et $|R_2(k,n)|$.

Soit $k\in[\![1,n]\!]$. $|R_1(k,n)|=\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-\beta}{n}\right)-\frac{\beta}{n}f'\left(\frac{k}{n}\right)\right|$. f est de classe C^2 sur $[-1,1]$, $\frac{k}{n}\in[-1,1]$, $\frac{k-\beta}{n}\in[-1,1]$ et $\frac{k-\beta}{n}\leqslant\frac{k}{n}$. $\exists\alpha_k\in\left[\frac{k-\beta}{n},\frac{k}{n}\right]$, $f\left(\frac{k-\beta}{n}\right)=f\left(\frac{k}{n}\right)+\left(\frac{k-\beta}{n}-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{k-\beta}{n}-\frac{k}{n}\right)^2f''(\alpha_k)$ (T.L.)

$|R_1(k,n)|=\left|-\frac{1}{2}\left(\frac{k-\beta}{n}-\frac{k}{n}\right)^2f''(\alpha_k)\right|=\frac{1}{2n^2}\beta^2|f''(\alpha_k)|\leqslant\frac{\beta^2}{2n^2}\sup_{x\in[-1,1]}|f''(x)|\leqslant\frac{\beta^2}{2n^2}M=\frac{A}{n^2}$ en posant : $A=\frac{M\beta^2}{2}$.

Soit F une primitive de f sur $[-1,1]$. $R_2(k,n)=F\left(\frac{k}{n}\right)-F\left(\frac{k-1}{n}\right)-\frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2n^2}F''\left(\frac{k}{n}\right)$. F est de classe C^3 sur $[-1,1]$, $\frac{k}{n}\in[-1,1]$, $\frac{k-1}{n}\in[-1,1]$ et $\frac{k}{n}>\frac{k-1}{n}$.

$\exists\beta_k\in\left]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right[$, $F\left(\frac{k-1}{n}\right)=F\left(\frac{k}{n}\right)+\underbrace{\left(\frac{k-1}{n}-\frac{k}{n}\right)}_{-1/n}F'\left(\frac{k}{n}\right)+\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{n}-\frac{k}{n}\right)^2}_{1/2n^2}F''\left(\frac{k}{n}\right)+\underbrace{\frac{1}{6}\left(\frac{k-1}{n}-\frac{k}{n}\right)^3}_{-1/6n^3}F'''(\beta_k)$ (T.L.)

$|R_2(k,n)|=\left|\frac{1}{6n^3}F'''(\beta_k)\right|=\frac{1}{6n^3}|f''(\beta_k)|\leqslant\frac{M}{6n^3}$

$|R_2(k,n)|\leqslant\frac{B}{n^3}$ avec $B=M/6$.

Q2.. Majoration de $|R_3(k,n)|$

$R_3(k,n)=\int_{(k-1)/n}^{k/n}f(t)dt-\frac{1}{n}f\left(\frac{k-\beta}{n}\right)-\frac{\beta-\frac{1}{2}}{n}\left(f(k/n)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)=R_2(k,n)+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}f\left(\frac{k-\beta}{n}\right)-\frac{\beta-1/2}{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$

$R_3(k,n)=R_2(k,n)+\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-\beta}{n}\right)-\frac{\beta}{n}f'\left(\frac{k}{n}\right)\right)+\frac{\beta}{n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{\beta-1/2}{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$

$R_3(k,n)=R_2(k,n)+\frac{1}{n}R_1(k,n)+\frac{\beta-1/2}{n}\left[f\left(\frac{k-1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}f'\left(\frac{k}{n}\right)\right]$

$\exists\gamma_k\in\left]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right[$, $f\left(\frac{k-1}{n}\right)=f\left(\frac{k}{n}\right)+\left(\frac{k-1}{n}-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{n}-\frac{k}{n}\right)^2f''(\gamma_k)$.

$R_3(k,n)=R_2(k,n)+\frac{1}{n}R_1(k,n)+\frac{\beta-1/2}{n}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2f''(\gamma_k)\right)=R_2(k,n)+\frac{1}{n}R_1(k,n)+\frac{\beta-1/2}{2n^3}f''(\gamma_k)$

$|R_3(k,n)|\leqslant|R_2(k,n)|+\frac{1}{n}|R_1(k,n)|+\frac{|\beta-1/2|}{2n^3}|f''(\gamma_k)|\leqslant\frac{B}{n^3}+\frac{1}{n}\frac{A}{n^2}+\frac{|\beta-1/2|M}{2}\frac{1}{n^3}=\frac{C}{n^3}$ avec $C=B+A+\frac{|\beta-1/2|M}{2}$!

Majoration de Δ_n.

$$\Delta_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,dt}_{\int_0^1 f(t)dt} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta-1/2}{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)}_{f(1)-f(0)}$$

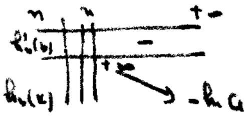
$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} R_3(k,n)\ .\ |\Delta_n| \leq \sum |R_3(k,n)| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{c}{n^3} = \frac{c}{n^2}\ .$$

ⓒ Q1.. $\to$ Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si $P = \lambda\prod_{i=0}^{n}(X-a_i)$: $\forall x \in \mathbb{R} - \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, $\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x-a_i}$

Rappel incontournable.

Pour $P_n(X) = \lambda(X-1)\cdots(X-n)$. $\forall x \in]n,+\infty[$, $h_n(x) = \frac{P_n'(x)a^{-x} - \ln a\, P_n(x)a^{-x}}{P_n(x)a^{-x}} = \frac{P_n'(x)}{P_n(x)} - \ln a = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{x-i} - \ln a$

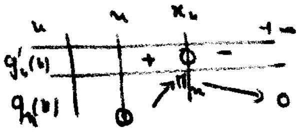
h_n est dérivable sur $]n,+\infty[$ et $\forall x \in]n,+\infty[$, $h_n'(x) = -\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(x-i)^2} < 0$.



Un raisonnement classique montre que h_n s'annule une fois et une seule sur $]n,+\infty[$; en x_n .
(continuité + st. monotonie + $0 \in]-\ln a,+\infty[$ ...)

$\forall x \in]n,+\infty[$, $g_n'(x) = h_n(x) \times g_n(x)$ et $g_n(x) > 0$.

ii.. g_n' s'annule une fois et une seule sur $]n,+\infty[$ en x_n (zéro de h_n).
$\forall x \in]n, x_n[$, $g_n'(x) > 0$ et $\forall x \in]x_n,+\infty[$, $g_n'(x) < 0$.



$\alpha = \frac{a}{a-1} > 1$!
$\Updownarrow$

Q2.- $h_n(n\alpha) = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n\alpha - i} - \ln a = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f_\alpha\left(\frac{i}{n}\right) - \ln a = \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_\alpha\left(\frac{i}{n}\right) - \ln a$

$h_n(n\alpha) = \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_\alpha\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f_\alpha(t)\,dt \iff \ln a = \int_0^1 f_\alpha(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{\alpha - t}\,dt = -\ln\left|\frac{\alpha-1}{\alpha}\right| \iff a = \frac{\alpha}{\alpha-1}$

$\Delta_n = \int_0^1 f_\alpha(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_\alpha\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta-1/2}{n}\left(f_\alpha(1)-f_\alpha(0)\right)$ et $h_n(n\alpha+\beta) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n\alpha+\beta-k} - \ln(a) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f_\alpha\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \ln a$

En additionnant on obtient : $\Delta_n + h_n(n\alpha+\beta) = \int_0^1 f_\alpha(t)\,dt + \frac{1}{n\alpha+\beta} - \frac{\beta-1/2}{n}\left(f_\alpha(1)-f_\alpha(0)\right) - \ln a$.

Il ne reste plus qu'à remarquer que : $\ln a = \int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$. $\Delta_n + h_n(n\alpha+\beta) = \frac{1}{n\alpha+\beta} - \frac{\beta-1/2}{n}\left(f_\alpha(1)-f_\alpha(0)\right)$

donc $h_n(n\alpha+\beta) = \frac{1}{n\alpha+\beta} - \frac{\beta-1/2}{n}\left(f_\alpha(1)-f_\alpha(0)\right) - \Delta_n$ $\qquad \left|\frac{\Delta_n}{n}\right| \leq \frac{c}{n}$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(n\,h_n(n\alpha+\beta)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n\alpha+\beta} - (\beta-1/2)\left(f_\alpha(1)-f_\alpha(0)\right) - \frac{\Delta_n}{n}\right) \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{\alpha} - (\beta-1/2)\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha-0}\right) - 0 = \frac{\alpha-\beta-\frac{1}{2}}{\alpha(\alpha-1)}$.

Q3.. x_n est le zéro de h_n sur $]n,+\infty[$. Pour avoir $n\alpha \leq x_n \leq (n+1)\alpha$ il suffit d'avoir
$h_n(n\alpha) \times h_n(n\alpha+\alpha) < 0$ (Voir les propriétés de h_n ... Q1)
$\lim_{n\to+\infty} n\,h_n(n\alpha+\beta) = \frac{\alpha-\beta-1/2}{\alpha(\alpha-1)}$ donc $\lim_{n\to+\infty} n\,h_n(n\alpha) = \frac{\alpha-1/2}{\alpha(\alpha-1)} > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} n\,h_n(n\alpha+\alpha) = \frac{-1/2}{\alpha(\alpha-1)} < 0$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(n^2 h_n(n\alpha)\,h_n(n\alpha+\alpha)\right) < 0$. $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow n^2 h_n(n\alpha)\,h_n(n\alpha+\alpha) < 0 \Rightarrow h_n(n\alpha)\,h_n(n\alpha+\alpha) < 0$.

$\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow n\alpha < x_n < (n+1)\alpha$ ... cqfd (et mieux !)

Q4 $\underset{b}{a}$.. Encadrement de y_n.
etc $\quad y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\ln\left(\frac{x_n}{n} - \frac{k}{n}\right)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq p$ (voir plus haut).

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\alpha - \frac{k}{n} \leq \frac{x_n}{n} - \frac{k}{n} \leq \alpha + \frac{\alpha}{n} - \frac{k}{n} = \alpha - \left(\frac{k-\alpha}{n}\right)$.

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\ln\left(\alpha - \frac{k}{n}\right) \leq \ln\left(\frac{x_n}{n} - \frac{k}{n}\right) \leq \ln\left(\alpha - \frac{k-\alpha}{n}\right)$

Considérons : $f : x \longmapsto \ln(\alpha - x)$. f est de classe C^2 sur $[-1,1]$ $(\alpha > 1)$

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{x_n}{n} - \frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\alpha - \frac{k-\alpha}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq y_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k-\alpha}{n}\right)$$

B. Q2 avec $\beta = 0$ donne : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = -\Delta_n + \int_0^1 f(t)\,dt + \frac{1}{2n}\left(f(1) - f(0)\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \overset{\lim\limits_{n\to+\infty}\Delta_n = 0 \atop \downarrow}{\int_0^1} f(t)\,dt.$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}f(0) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(t)\,dt$ $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} f(0) = 0\right)$

B.Q2 avec $\beta = \alpha$ permet de la même manière de montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k-\alpha}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(t)\,dt.$

Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \ln(\alpha - t)\,dt = \left[(t-\alpha)\ln(\alpha - t) - t\right]_0^1 = \underline{\underline{(1-\alpha)\ln(\alpha-1) - 1 + \alpha\ln\alpha}}$

$\Pi_n = f_n(x_n) = x_n(x_n - 1)\cdots(x_n - n)\,a^{-x_n}$. Posons $z_n = \frac{1}{n}(\Pi_n)^{1/n}$

$$\ln z_n = -\ln n + \frac{1}{n}\ln \Pi_n = -\ln n + \frac{1}{n}\ln\left(x_n(x_n-1)\cdots(x_n-n)\,a^{-x_n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n}(x_n - k)\right) - \ln n - \frac{x_n}{n}\ln a$$

$$\ln z_n = \frac{1}{n}\ln\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{x_n - k}{n}\right) + \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n} n\right) - \ln n - \frac{x_n}{n}\ln a = y_n + \frac{1}{n}\ln n^{n+1} - \ln n - \frac{x_n}{n}\ln a$$

$$\ln z_n = y_n + \left(\frac{n+1}{n} - 1\right)\ln n - \frac{x_n}{n}\ln a = y_n + \frac{\ln n}{n} - \frac{x_n}{n}\ln a$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = \alpha$ (à partir d'un certain rang : $n\alpha \leq x_n \leq (n+1)\alpha$)

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(z_n) = \lim_{n\to+\infty}(y_n) - \alpha\ln a = (1-\alpha)\ln(\alpha-1) - 1 + \alpha\ln\alpha - \alpha\ln a \underset{\underset{\alpha = \frac{a}{a-1}}{\uparrow}}{=} -\ln(a-1) - 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = e^{-\ln(a-1) - 1} = \frac{1}{(a-1)e}.$$
