Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION DE 1985

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul est autorisé.

On désigne par a un nombre réel strictement supérieur à 1. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note g_n la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par la relation :

$$g_n(x) = x(x-1)\dots(x-n)\,a^{-x}.$$

L'objet du problème est d'étudier le maximum de la fonction g_n sur l'intervalle $[n, +\infty[$.

I. Dans cette partie, on examine le cas particulier où $n = 1$.

1\. *a*) Étudier la variation de la fonction $\dfrac{g_1'}{g_1}$. On notera u et v les valeurs de x où cette fonction s'annule, avec $u < v$.

b) Dresser le tableau de variation de g_1. Étudier la branche infinie du graphe de g_1.

2\. Dans cette question, on prend $a = 2$.

a) Calculer des valeurs approchées à 10^{-5} près de u, v, $g_1(u)$ *et* $g_1(v)$.

b) Construire le graphe de g_1.

II. Dans cette partie, on considère une fonction réelle f de classe C^2 sur l'intervalle $[-1, 1]$. On désigne par M un nombre réel tel que, pour tout élément x de $[-1, 1]$, $|f''(x)| \leqslant M$.

Soit β un élément de $\mathbf{R}_+$. On se propose d'approcher l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ par la somme $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-\beta}{n}\right)$.

On suppose que $n \geqslant \beta$. Pour tout nombre entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose :

$$R_1(k,n) = f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta}{n} f'\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$R_2(k,n) = \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right).$$

1\. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à des fonctions convenables au point k/n, déterminer des nombres réels A et B tels que, quels que soient n et k,

$$|R_1(k,n)| \leqslant \frac{A}{n^2}$$

$$|R_2(k,n)| \leqslant \frac{B}{n^3}.$$

2\. *a*) On pose :

$$R_3(k,n) = \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta - \frac{1}{2}}{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right).$$

Déduire de la question précédente un nombre réel C tel que, quels que soient n et k,

$$|R_3(k,n)| \leqslant \frac{C}{n^3}.$$

b) On pose :

$$\Delta_n = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta - \frac{1}{2}}{n}[f(1) - f(0)].$$

Prouver que :

$$|\Delta_n| \leqslant \frac{C}{n^2}.$$

III. On revient à l'étude de la fonction g_n dans le cas général.

1. *a*) Pour tout nombre réel x strictement supérieur à n, calculer :

$$h_n(x) = \frac{g_n'(x)}{g_n(x)}.$$

Montrer que, sur l'intervalle $]n, +\infty[$, la dérivée de g_n s'annule en un point x_n et un seul. Étudier le signe de g_n' sur $]n, +\infty[$. On pose $M_n = g_n(x_n)$.

2. Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1. On considère la fonction f_α définie par la relation :

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha - x}.$$

a) Déterminer en fonction de a la valeur de α pour laquelle :

$$h_n(n\alpha) = \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_\alpha\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f_\alpha(t)\,dt.$$

Dans toute la suite du problème, on donne à α la valeur ainsi déterminée.
(On contrôlera que si $a = 2$, alors $\alpha = 2$.)

b) Vérifier que :

$$h_n(n\alpha + \beta) = \frac{1}{n\alpha + \beta} - \frac{\beta - \frac{1}{2}}{n}[f_\alpha(1) - f_\alpha(0)] - \Delta_n,$$

où Δ_n a été défini dans la question II 2 (avec ici $f = f_\alpha$).
Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $n h_n(n\alpha + \beta)$.

3. Montrer qu'à partir d'un certain rang,

$$n\alpha \leqslant x_n \leqslant (n+1)\alpha.$$

À cet effet, on étudiera les signes de $h_n(n\alpha)$ et de $h_n((n+1)\alpha)$.

4. *a*) On se propose de déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de :

$$y_n = \frac{1}{n}\ln \prod_{k=0}^{n} \frac{x_n - k}{n}.$$

On encadrera y_n à l'aide de l'encadrement de x_n obtenu précédemment. On utilisera le résultat de la question II.2.*b*) avec une fonction f convenable et $\beta = 0$, puis $\beta = \alpha$.

En conclure que :

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = \int_0^1 \ln(\alpha - x)\,dx.$$

b) Calculer cette intégrale.

c) Montrer finalement que la suite de terme général $\frac{1}{n}(M_n)^{1/n}$ converge et déterminer sa limite.
On contrôlera que pour $a = 2$ cette limite est égale à $1/e$.