I Cette partie ne présente pas plus de difficulté que d'intérêt. Nous passerons donc assez rapidement.

Q 1 a) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = -e^{-1-t} < 0$. $\lim\limits_{t\mapsto+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\mapsto+\infty} e^{-1-t} = 0$ et $\lim\limits_{t\mapsto-\infty} f(t) = \lim\limits_{t\mapsto-\infty} e^{-1-t} = +\infty$

t	$-\infty$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{t\mapsto-\infty} \frac{f(t)}{t} = \lim\limits_{t\mapsto-\infty} \frac{e^{-1-t}}{t} = \lim\limits_{t'\mapsto+\infty} \frac{-1}{e} \frac{e^{t'}}{t'} = -\infty$.

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de f admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées et une asymptote : l'axe des abscisses.

b) Posons : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(t) - t$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = -e^{-1-t} - 1 < 0$

φ est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$. φ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $\varphi(\mathbb{R})$. $\lim\limits_{t\mapsto+\infty} \varphi(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\mapsto-\infty} \varphi(t) = +\infty$; $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

$0 \in \varphi(\mathbb{R})$, donc il existe un réel a et un seul tel que : $\varphi(a) = 0$.

$\exists!\, a \in \mathbb{R}$, $f(a) = a$. L'équation $t \in \mathbb{R}$ et $f(t) = t$ admet donc une solution et une seule.

Remarque... $\varphi(0) = \frac{1}{e}$ et $\varphi(\frac{1}{e}) = e^{-1-\frac{1}{e}} - \frac{1}{e} \simeq -0{,}11$; $\varphi(0) > 0$ et $\varphi(\frac{1}{e}) < 0$ donc $a \in]0, \frac{1}{e}[$

On obtient rapidement par dichotomie : $a \in]0{,}27 ; 0{,}28[$.

c) $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|f'(t)| = e^{-1} e^{-t} = \frac{1}{e} e^{-t}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|f'(t)| \leq \frac{1}{e}$. L'inégalité des A.F. montre que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{e}|x - y|$

d) Soit $t \in [0, \frac{1}{e}]$; $f(\frac{1}{e}) \leq f(t) \leq f(0)$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}$

$f(0) = \frac{1}{e}$ et $f(\frac{1}{e}) = e^{-1-\frac{1}{e}} > 0$; donc $f(t) \in [0, \frac{1}{e}]$.

$\forall t \in [0, \frac{1}{e}]$, $f(t) \in [0, \frac{1}{e}]$; $[0, \frac{1}{e}]$ est stable par f. De plus $a \in [0, \frac{1}{e}]$ comme nous l'avons vu en b).

Q 2. a) Une récurrence simple montre que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \frac{1}{e}]$ (cet intervalle est stable par f).

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| = |f(u_n) - f(a)| \leq \frac{1}{e}|u_n - a|$.

$a \in [0, \frac{1}{e}]$

Une récurrence immédiate donne : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leq (\frac{1}{e})^n |u_0 - a| = (\frac{1}{e})^n a \leq (\frac{1}{e})^{n+1}$

$|\frac{1}{e}| < 1$, donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} (\frac{1}{e})^{n+1} = 0$; par conséquent : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} |u_n - a| = 0$. $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers a.

b) Pour avoir $|u_{n_0} - a| \leq 10^{-6}$ il suffit d'avoir $\frac{1}{e^{n_0+1}} \leq 10^{-6}$ ou : $10^6 \leq e^{n_0+1}$, soit encore $n_0 + 1 \geq 6 \ln 10 \simeq 13{,}82$ c'est à dire : $n_0 \geq 13$ ($n_0 + 1 \geq 14$!)

$u_0 = 0$; $u_1 \simeq 0{,}367879$; $u_2 \simeq 0{,}254646$; $u_3 \simeq 0{,}285177$; $u_4 \simeq 0{,}276602$; $u_5 \simeq 0{,}278984$

$u_6 \simeq 0{,}278320$; $u_7 \simeq 0{,}278505$; $u_8 \simeq 0{,}278453$; $u_9 \simeq 0{,}278468$; $u_{10} \simeq 0{,}278464$; $u_{11} \simeq 0{,}278465$

$u_{12} \simeq 0{,}278464$; $u_{13} \simeq 0{,}278465$ ... ($a \simeq 0{,}2784645428$)

Notons que u_{10} est une valeur approchée de a à 10^{-6} près ; notons encore que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leq a \leq u_{2n+1}$

Après ce hors-d'œuvre bien fade attaquons le plat de résistance.

II Q 1. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\ln \theta_n = \ln \frac{1}{n} + \ln \sqrt[n]{n!} = -\ln n + \frac{1}{n} \ln n!$ et $\ln \omega_n = n \ln n - \ln n!$

Par conséquent : $\ln \theta_n = -\frac{1}{n}(n \ln n - \ln n!) = -\frac{1}{n} \ln \omega_n$

Q2.. Minoration de w.

Q2 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}=\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\times\dfrac{n!}{n^n}=(n+1)\times\dfrac{(n+1)^n}{n^n}\times\dfrac{n!}{(n+1)!}=(n+1)\times\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n\times\dfrac{1}{n+1}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

V.1.. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1=\left(1+\frac{1}{n}-1\right)\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}+\dots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right]\geq\frac{1}{n}(1+1+\dots+1)=1$

$\uparrow$ $1+\frac{1}{n}\geq 1$

Donc : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 2$

V.2. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k\geq C_n^0\left(\frac{1}{n}\right)^0+C_n^1\left(\frac{1}{n}\right)^1=1+n\times\frac{1}{n}=2$

$\uparrow$ Formule du binome.

c) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ w_{n+1}\geq 2w_n$

Une récurrence simple montre que si $p\in\mathbb{N}^*$: $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq p\Rightarrow w_n\geq 2^{n-p}w_p$ (faire cette récurrence)

$\begin{cases} w_1=1\ ;\ w_2=2\ ;\ w_3=4{,}5\ ;\ w_4=\frac{32}{3}\approx 10{,}6\ ;\ w_5=\frac{625}{24}\approx 26\ ;\ w_6=64{,}8\\ 2^1=2\ ;\ 2^2=4\ ;\ 2^3=8\ ;\ 2^4=16\ ;\ 2^5=32\ ;\ 2^6=64\end{cases}$

$w_6\geq 2^6$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 6\Rightarrow w_n\geq 2^{n-6}w_6\geq 2^{n-6}\times 2^6=2^n$.

CL $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 6\Rightarrow w_n\geq 2^n$.

Remarque.. $\lim_{n\to+\infty}w_n=+\infty$

d) $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 6\Rightarrow n\ln 2\leq\ln w_n=-n\ln v_n$

$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 6\Rightarrow\ln v_n\leq-\ln 2=\ln\frac{1}{2}\Rightarrow v_n\leq\frac{1}{2}$

Conclusion.. $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 6\Rightarrow v_n\leq\frac{1}{2}$

On peut aussi remarquer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{w_n}}$

Q3.. Convergence de v.

a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\ln w_{n+1}-\ln w_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

$\lim_{n\to+\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}=1$

b) Nous savons déjà que : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \ln(1+x)\leq x$ (ceci vaut sur $]-1,+\infty[$).

Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \ln(1+x)\geq x-\frac{x^2}{2}$. Posons pour cela : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \varphi(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \varphi'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{1-1-x+x+x^2}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}\geq 0$

$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & & +\infty\\ \hline \varphi'(x) & 0 & + & \\ \varphi(x) & 0 & \nearrow & \varphi(+\infty)\end{array}$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \varphi(x)\geq 0$; cqfd.

$\uparrow$ (φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi(0)=0$)

CL $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ 0\leq x-\ln(1+x)\leq\frac{x^2}{2}$

Soit $n\in\mathbb{N}$. $\ln w_n-\ln w_{n+1}=-\ln\frac{w_{n+1}}{w_n}=-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

. $0\leq\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{2n^2}$; $0\leq 1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{2n}$; on obtient donc :

$0\leq 1+\ln w_n-\ln w_{n+1}\leq\frac{1}{2n}$ (ce qui redonne : $\lim_{n\to+\infty}(\ln w_{n+1}-\ln w_n)=1$)

c) Soit $x\in[0,1[$. $1-x\in\mathbb{R}_+$; $\ln(1-x)\leq 1-x-1$ donc : $x\leq-\ln(1-x)$

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$. Appliquons cette dernière inégalité pour $x=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n}$ et sommons.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\leq-\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)-\dots-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=-\ln\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$

donc $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\leq 1-\ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\dots\times\frac{n-1}{n}\right)=1-\ln\frac{1}{n}=1+\ln n$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\leq 1+\ln n$. Il est clair que ceci vaut encore pour $n=1$. CL $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\leq 1+\ln n$.

d) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\le 1+\ln w_n-\ln w_{n+1}\le \frac{1}{2n}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que : $n\ge 2$

$$0\le 1+\ln w_1-\ln w_2\le \frac{1}{2\times 1}$$
$$0\le 1+\ln w_2-\ln w_3\le \frac{1}{2\times 2}$$
$$0\le 1+\ln w_3-\ln w_2\le \frac{1}{2\times 3}$$
$$\cdots$$
$$0\le 1+\ln w_{n-1}-\ln w_n\le \frac{1}{2\times(n-1)}$$

Par sommation on obtient :

$$0\le (n-1)+\ln w_1-\ln w_n\le \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)$$
$$1\le n-\ln w_n\le \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)+1\le \frac{1}{2}(1+\ln(n-1))+1$$
$$\frac{1}{n}\le 1-\frac{1}{n}\ln w_n\le \frac{3}{2n}+\frac{\ln(n-1)}{2n}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n-1)}{2n}=0$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln w_n=1$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\ln v_n=-\frac{1}{n}\ln w_n$. Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln v_n=-1$. $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Conclusion : $(v_n)_{n\ge1}$ converge vers $1/e$

Remarque : ceci permet de dire que : $\exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}^*, n\ge n_0\Rightarrow v_n<\frac{1}{2}$ (car $\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$)

On ne peut affirmer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, n\ge 6\Rightarrow v_n\le\frac{1}{2}$; à moins de montrer que $(v_n)_{n\ge1}$ est décroissante (ceci est vrai mais n'est pas évident). Enfin le dessert !

III.- Q1 a) Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Montrons par récurrence que : $\forall p\in\mathbb{N}$, $e^{-x}=A_p(x)+(-1)^{p+1}I_p(x)$.

→ $A_0(x)+(-1)^{0+1}I_0(x)=(-1)^0\frac{x^0}{0!}+(-1)^{0+1}\int_0^x e^{-t}\frac{(x-t)^0}{0!}dt=1-\int_0^x e^{-t}dt=1-[-e^{-t}]_0^x=e^{-x}$

La propriété est vraie pour $p=0$. (oui je sais .... !)

→ Supposons la propriété vraie pour $p\in\mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$.

$$I_{p+1}(x)=\int_0^x e^{-t}\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}dt=\left[-e^{-t}\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}\right]_0^x-\int_0^x(-e^{-t})\left(-\frac{(x-t)^p}{p!}\right)dt$$

Intégration par parties.

$I_{p+1}(x)=\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}-I_p(x)$; $I_p(x)=\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}-I_{p+1}(x)$

$$e^{-x}=A_p(x)+(-1)^{p+1}I_p(x)=A_p(x)+(-1)^{p+1}\left[\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}-I_{p+1}(x)\right]=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{x^k}{k!}+(-1)^{p+1}\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}+(-1)^{p+2}I_{p+1}(x)$$

$$e^{-x}=\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\frac{x^k}{k!}+(-1)^{p+2}I_{p+1}(x)=A_{p+1}(x)+(-1)^{p+2}I_{p+1}(x),\ \text{cqfd.}$$

Remarque : cette égalité n'est autre que la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à $x\mapsto e^{-x}$.

b) $\forall p\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}_+$, $\int_0^x e^{-t}\frac{(x-t)^p}{p!}dt\ge 0$ (si $x\in\mathbb{R}^+$, $\forall t\in[0,x]$, $e^{-t}\frac{(x-t)^p}{p!}\ge 0$)

Soit $x\in\mathbb{R}_+$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $e^{-x}=A_{2n}(x)-I_{2n}(x)\le A_{2n}(x)$;

$\forall n\in\mathbb{N}$, $e^{-x}=A_{2n+1}(x)+I_{2n+1}(x)\ge A_{2n+1}(x)$.

Par conséquent : $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $A_{2n+1}(x)\le e^{-x}\le A_{2n}(x)$.

c) Soit $p\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $A_{p+1}(x)=\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$ et $A'_{p+1}(x)=\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^k\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\overset{k'=k-1}{=}\sum_{k'=0}^{p}(-1)^{k'+1}\frac{x^{k'}}{k'!}=-A_p(x)$

d) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $A'_{2n-1}(x)=-A_{2n}(x)\le -e^{-x}<0$

$\forall x\in\mathbb{R}^*_-$, $A'_{2n-1}(x)=-\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}=-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-x)^k}{k!}<0$

Par conséquent : $\forall x\in\mathbb{R}$, $A'_{2n-1}(x)<0$. A_{2n-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

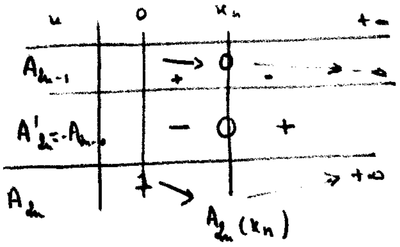
$A_{2n-1}(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} A_{2n-1}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-x)^k}{k!} = -\infty$

↑ terme de plus haut degré $\frac{(-x)^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

A_{2n-1} est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$; A_{2n-1} définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur l'intervalle $A_{2n-1}(\mathbb{R}_+)=]-\infty,1]$

$0\in]-\infty,1[$; donc A_{2n-1} admet un zéro et un seul x_n sur $\mathbb{R}_+$

$A'_{2n}(x_n) = -A_{2n-1}(x_n)=0$



Q2 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$A_{2n}(x_n)=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{x_n^k}{k!} = \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\frac{x_n^k}{k!}+\frac{x_n^{2n}}{(2n)!} = A_{2n-1}(x_n)+\frac{x_n^{2n}}{(2n)!} = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!}$$

$$A_{2n+1}(x_n) = A_{2n}(x_n)+(-1)^{2n+1}\frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!}-\frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!}\left(1-\frac{x_n}{2n+1}\right)$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$

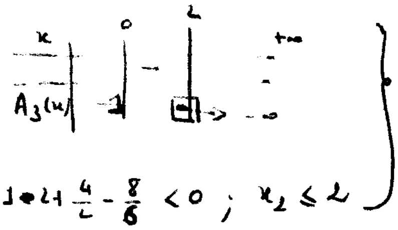
A_{2n} est décroissante sur $[0,x_n]$; $A_{2n}(0)\geq A_{2n}(x_n)$; $1\geq \frac{x_n^{2n}}{(2n)!}$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 6 \Rightarrow v_n\leq\frac12$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3 \Rightarrow v_{2n}\leq \frac12 \Rightarrow \frac{1}{2n}\sqrt[2n]{(2n)!}\leq\frac12 \Rightarrow (2n)!\leq n^{2n}$

Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $n\geq 3$

$1\geq\frac{x_n^{2n}}{(2n)!}\Rightarrow x_n^{2n}\leq(2n)!\Rightarrow x_n^{2n}\leq n^{2n}\Rightarrow x_n\leq n$.

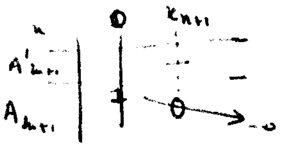


$\forall x\in\mathbb{R}$, $A_3(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$. A_3 s'annule sur $\mathbb{R}_+$ en x_2. $A_3(2)=1-2+\frac42-\frac86<0$; $x_2\leq 2$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $A_1(x)=1-x$; A_1 s'annule sur $\mathbb{R}_+$ en 1 ; $x_1=1\leq1$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $x_n\leq n$.

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$: $A_{2n+1}(x_n)=\frac{x_n^{2n}}{(2n)!}\left(1-\frac{x_n}{2n+1}\right)$. $x_n\leq n$, donc $x_n<2n+1$; $1-\frac{x_n}{2n+1}>0$; $A_{2n+1}(x_n)>0$



Comme $A_{2n+1}(x_{n+1})=0$: $x_n<x_{n+1}$

d) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $x_n<x_{n+1}$. $(x_n)_{n\geq1}$ est strictement croissante.

Q3 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $e^{-x_n}\leq A_{2n}(x_n)=\frac{x_n^{2n}}{(2n)!}$; par conséquent : $1\leq\frac{x_n^{2n}}{(2n)!}e^{x_n}$.

$$e^{-x_n}\geq A_{2n+1}(x_n)=\frac{x_n^{2n}}{(2n)!}\left(1-\frac{x_n}{2n+1}\right) \geq \frac{x_n^{2n}}{(2n)!}\left(1-\frac{n}{2n+1}\right) = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!}\,\frac{n+1}{2n+1}\geq\frac12\,\frac{x_n^{2n}}{(2n)!}$$

↑ $-x_n\geq -n$ ↑ $\frac{n+1}{2n+1}\geq\frac12$

ce qui donne : $2e^{-x_n}\geq\frac{x_n^{2n}}{(2n)!}$ ou $\frac{x_n^{2n}}{(2n)!}e^{x_n}\leq 2$

Par conséquent : $1\leq\frac{x_n^{2n}}{(2n)!}e^{x_n}\leq 2$.

b) $n\in\mathbb{N}^*$. $y_n=\frac{x_n}{2n}$ ou : $x_n=2n\,y_n$. $1\leq\frac{(2n)^{2n}\,y_n^{2n}\left(e^{y_n}\right)^{2n}}{(2n)!}\leq 2$; $1\leq\frac{2n\,y_n}{\sqrt[2n]{(2n)!}}\,e^{y_n}\leq\sqrt[2n]{2}$

On a donc : $\frac{1}{2n}\sqrt[2n]{(2n)!} \le y_n e^{y_n} \le \frac{1}{2n}\sqrt[2n]{(2n)!}\,\sqrt[2n]{2}$

Soit : $v_{2n} \le y_n e^{y_n} \le v_{2n}\, 2^{1/2n}$

cq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} \le y_n e^{y_n} \le 2^{1/2n} v_{2n}$.

$\lim_{n\to+\infty} v_{2n} = \frac{1}{e}$ et $\lim_{n\to+\infty} 2^{1/2n} v_{2n} = 1 \times \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$; donc $(y_n e^{y_n})_{n\ge1}$ converge vers $1/e$. $(z_n)_{n\ge1}$ converge vers $\frac{1}{e}$.

Q4.- Posons $\forall y \in \mathbb{R}^+$, $h(y) = y e^y$. h est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall y \in \mathbb{R}^+$, $h'(y) = e^y + y e^y = (1+y) e^y > 0$

h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; h définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur l'intervalle $h(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ ($h(0)=0$ et $\lim_{y\to+\infty} h(y) = +\infty$).

h^{-1} est une bijection <u>continue</u> de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in \mathbb{R}_+$ et $(z_n)_{n\ge1}$ converge vers $\frac{1}{e}$ qui appartient à $\mathbb{R}_+$

donc $(h^{-1}(z_n))_{n\ge1}$ converge vers $h^{-1}(1/e)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h^{-1}(z_n) = h^{-1}(y_n e^{y_n}) = h^{-1}(h(y_n)) = y_n$. $(y_n)_{n\ge1}$ converge vers $h^{-1}(1/e)$.

$\frac{1}{e} = h(h^{-1}(1/e)) = h^{-1}(1/e)\, e^{h^{-1}(1/e)}$; $\frac{1}{e} e^{-h^{-1}(1/e)} = h^{-1}(1/e)$; $e^{-(h^{-1}(1/e))-1} = h^{-1}(1/e)$.

Donc $f(h^{-1}(1/e)) = h^{-1}(1/e)$ ce qui donne : $h^{-1}(1/e) = a$.

voir I Q1b

Par conséquent : $(y_n)_{n\ge1}$ converge vers a.

Morale.- $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{2n} = a$ donc $x_n \sim 2an$ (en particulier $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$)

C'est fini ! Salut et à la prochaine !

Les gens épuisés par cette lecture pourront se regaffler (?!) en écoutant Guesch Patti. Pour les désespérer je vous conseille de vous achever avec Kirsten Flagstad dans la nuit d'Isolde.