I $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) = e^{-1-t}$

Q1 a) Etudier rapidement f et construire sur une même figure les représentations graphiques de f et de la fonction $t \mapsto t$.

b) Montrer que l'équation $t \in \mathbb{R}_+$ et $f(t) = t$ admet une solution et une seule que nous noterons a.

c) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ -\frac{1}{e} \leq f'(t) \leq 0$

En déduire que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{e}|x-y|$ (commencer par supposer $x \leq y$ et intégrer)

d) Montrer que l'intervalle $[0, \frac{1}{e}]$ est stable par f et qu'il contient a.

Q2 $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: u_n est défini et $u_n \in [0, \frac{1}{e}]$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - a| \leq \frac{1}{e^{n+1}}$.

En déduire que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers a.

b) Déterminer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $|u_{n_0} - a| \leq 10^{-6}$

Ecrire les valeurs décimales approchées à la précision 10^{-6} des termes u_n où $1 \leq n \leq n_0$

II $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n}(n!)^{1/n}$ et $w_n = \frac{n^n}{n!}$.

Q1 Trouver une relation simple entre $\ln v_n$ et $\ln w_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Q2 a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{w_{n+1}}{w_n} = (1 + \frac{1}{n})^n$

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1 + \frac{1}{n})^n \geq 2$

$\left((1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\frac{1}{n})^k = 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + \cdots \right)$

c) En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 6 \Rightarrow w_n \geq 2^n$.

d) Déterminer un majorant de la suite $(v_n)_{n \geq 6}$.

Q3 a) Trouver la limite de la suite $(\ln w_{n+1} - \ln w_n)_{n \geq 1}$

b) On rappelle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}$ ($x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \ldots$ bien connu ... inutile de le redémontrer)

Montrer que : $0 \leq 1 + \ln w_k - \ln w_{k+1} \leq \frac{1}{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

c) On rappelle que : $\forall x \in [0,1[,\ x \leq -\ln(1-x)$ (c'est encore $\ln(1+x) \leq x$)

montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \leq 1+\ln n$

d) Prouver finalement que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln w_n = 1$. En déduire la limite de $(v_n)_{n\geq 1}$

(utiliser b et c.)

$\boxed{\text{III}}$ $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $A_p(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$ et $I_p(x) = \int_0^x e^{-t} \frac{(x-t)^p}{p!} dt$

Q1) a) montrer par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-x} = A_p(x) + (-1)^{p+1} I_p(x)$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $A_{2n+1}(x) \leq e^{-x} \leq A_{2n}(x)$. (1)

c) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, exprimer A'_{p+1} en fonction de A_p.

d) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x \in \mathbb{R}_+$ et $A_{2n-1}(x) = 0$ admet une solution et une seule que nous notons x_n.

calculer $A'_{2n}(x_n)$ et dresser le tableau de variation de A_{2n-1} et de A_{2n} pour $n \in \mathbb{N}^*$

Q2) $n \in \mathbb{N}^*$.

a) montrer que $A_{2n}(x_n) = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!}$ et $A_{2n+1}(x_n) = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!}\left(1 - \frac{x_n}{2n+1}\right)$

b) En déduire que $\frac{x_n^{2n}}{(2n)!} \leq 1$. A l'aide de la majoration du II 2 d), montrer que si $n \geq 3$: $x_n \leq n$. Vérifier que ceci vaut aussi pour $n = 1$ et $n = 2$.

c) montrer que $A_{2n+1}(x_n) > 0$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

Q3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) A l'aide de (1) (III Q1 b) et de la majoration $x_n \leq n$ établir l'encadrement

$$1 \leq \frac{x_n^{2n}}{(2n)!} e^{x_n} \leq 2$$

b) On pose $y_n = \frac{x_n}{2n}$. montrer que : $v_{2n} \leq y_n e^{y_n} \leq 2^{1/2n} v_{2n}$

c) En déduire que la suite de terme général $z_n = y_n e^{y_n}$ converge vers $\frac{1}{e}$

Q4) En conclure que la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ converge vers a (utiliser $y \to y e^{y}$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa réciproque...)

Étude de la suite des zéros d'une suite de polynomes. _Durée : 4H

p1

Pour tout nombre entier naturel p, on considère la fonction A_p définie sur $[0, +\infty[$ par la relation :

$$A_p(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^k}{k!}.$$

Dans ce problème, on étudie la suite des nombres réels positifs x_n tels que $A_{2n-1}(x_n) = 0$, où $n \geqslant 1$, ce qui fait l'objet de la partie III. Dans les parties I et II, on établit des résultats auxiliaires.

I. Dans cette partie, on étudie un algorithme d'approximation de l'unique solution de l'équation $f(t) = t$, où, pour tout nombre réel positif t :

$$f(t) = e^{-1-t}.$$

1. *a*) Construire sur une même figure les représentations graphiques de la fonction f et de la fonction $t \mapsto t$.

b) Montrer que l'équation $f(t) = t$ admet une solution a et une seule.

c) Montrer que, pour tout couple (x, y) de nombres réels positifs :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{e}|x - y|.$$

d) Prouver que l'intervalle $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ est stable par f et que a appartient à cet intervalle.

2. Soit u la suite numérique définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

et la condition initiale $u_0 = 0$.

a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{e} \qquad \text{et} \qquad |u_n - a| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}}.$$

En déduire que la suite u converge vers a.

b) Déterminer un nombre entier naturel n_0 tel que :

$$|u_{n_0} - a| \leqslant 10^{-6}.$$

Écrire des valeurs décimales approchées à la précision 10^{-6} des termes u_n, où $1 \leqslant n \leqslant n_0$.

II. On se propose d'étudier les suites v et w définies par les relations :

$$v_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} \qquad w_n = \frac{n^n}{n!} \qquad \text{où} \quad n \geqslant 1.$$

1. Trouver une relation simple entre $\ln v_n$ et $\ln w_n$.

2. *Minoration de w*

a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2.$$

c) En déduire que, si $n \geqslant 6$, alors $w_n \geqslant 2^n$.

d) Déterminer un majorant de la suite $(v_n)_{n \geqslant 6}$.

3. *Convergence de la suite v*

a) Déterminer la limite de la suite : $(\ln w_{n+1} - \ln w_n)$.

b) Établir que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$:

$$0 \leqslant x - \ln(1 + x) \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

En déduire que :

$$0 \leqslant 1 + \ln w_n - \ln w_{n+1} \leqslant \frac{1}{2n}.$$

c) Établir que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1[$:

$$x \leqslant -\ln(1 - x).$$

en déduire que :

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \ln n.$$

d) Prouver finalement que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln w_n = 1.$

En déduire la limite de la suite v.

Peut-on retrouver ainsi la majoration obtenue dans la question II. 2. *d*) ?

III. *Étude de la suite* (x_n)

1. *a*) Prouver que, pour tout nombre entier naturel p et pour tout nombre réel positif x :

$$e^{-x} = A_p(x) + (-1)^{p+1} I_p(x), \qquad \text{où} \quad I_p(x) = \int_0^x e^{-t} \frac{(x-t)^p}{p!} dt.$$

b) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel positif x :

(1) $$A_{2n+1}(x) \leqslant e^{-x} \leqslant A_{2n}(x).$$

c) Exprimer la dérivée A'_{p+1} en fonction de A_p.

d) Prouver que, pour tout nombre entier naturel non nul n, la fonction A_{2n-1} est strictement décroissante et que, sur l'intervalle $[0, +\infty[$, l'équation $A_{2n-1}(x) = 0$ admet une solution x_n et une seule.

Calculer $A'_{2n}(x_n)$ et dresser le tableau de variation de A_{2n-1} et de A_{2n}.

ESCP 86

2. Soit n un nombre entier naturel non nul.

a) Montrer que :

$$A_{2n}(x_n) = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{et} \qquad A_{2n+1}(x_n) = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!}\left(1 - \frac{x_n}{2n+1}\right).$$

b) En déduire que $\frac{x_n^{2n}}{(2n)!} \leqslant 1$. À l'aide de la majoration établie au II. 2. d), montrer que si $n \geqslant 3$, $x_n \leqslant n$. Vérifier directement que ce dernier résultat est encore valable si $n = 1$ et $n = 2$.

c) Montrer que $A_{2n+1}(x_n) > 0$. En déduire que la suite (x_n) est strictement croissante.

3. Soit n un nombre entier naturel non nul.

a) À l'aide de (1) et de la majoration $x_n \leqslant n$, établir l'encadrement :

$$1 \leqslant \frac{x_n^{2n}}{(2n)!} e^{x_n} \leqslant 2.$$

b) On pose $y_n = \frac{x_n}{2n}$. Montrer que :

$$v_{2n} \leqslant y_n e^{y_n} \leqslant 2^{1/2n} \cdot v_{2n}.$$

c) En déduire que la suite de terme général $z_n = y_n e^{y_n}$ converge vers $\frac{1}{e}$.

4. En conclure que la suite (y_n) converge vers a. (On étudiera à cet effet la fonction $y \mapsto y e^y$.)