I **Q1**- Soit $x \in [0,1]$. $f_\lambda(x) = x \iff x + \lambda\left(\frac{1}{2} - x^3\right) = x \iff \lambda\left(\frac{1}{2} - x^3\right) = 0 \iff x^3 = \frac{1}{2} \iff x = \alpha$.

α est donc l'unique solution de l'équation $x \in [0,1]$ et $f_\lambda(x) = x$.

Q2- a) f_λ est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $\underline{\underline{f'_\lambda(x) = 1 - 3\lambda x^2}}$

f_λ croissante sur $[0,1] \iff \forall x \in [0,1],\ f'_\lambda(x) \geq 0 \iff \forall x \in [0,1],\ x^2 \leq \frac{1}{3\lambda}$

→ Supposons f_λ croissante sur $[0,1]$. Alors $\forall x \in [0,1]$, $x^2 \leq \frac{1}{3\lambda}$ donc $1^2 \leq \frac{1}{3\lambda}$; par conséquent $\lambda \leq \frac{1}{3}$.

→ <u>Réciproquement</u> supposons $\lambda \leq \frac{1}{3}$. Alors $1 \leq \frac{1}{3\lambda}$; donc $\forall x \in [0,1]$, $x^2 \leq 1 \leq \frac{1}{3\lambda}$

Par conséquent f_λ est croissante sur $[0,1]$.

Finalement <u>f_λ est croissante sur $[0,1]$ si et seulement si $\lambda \leq \frac{1}{3}$.</u>

Dans ce cas : $\forall x \in [0,1[$, $f'_\lambda(x) = 1 - 3\lambda x^2 > 1 - 3\lambda \geq 0$; $\forall x \in [0,1[$, $f'_\lambda(x) > 0$. f_λ étant continue sur $[0,1]$ ce qui précède suffit pour dire que <u>f_λ est strictement croissante sur $[0,1]$</u>

b) Soit $x \in]\alpha,1]$; $\alpha < x \leq 1$. La stricte croissance de f_λ sur $[0,1]$ donc sur $[\alpha,1]$ donne alors : $\alpha = f_\lambda(\alpha) < f_\lambda(x) \leq f_\lambda(1) = 1 + \lambda(-0,5) \leq 1$; $\alpha < f_\lambda(x) \leq 1$.

Finalement : $\forall x \in]\alpha,1]$, $f_\lambda(x) \in]\alpha,1]$. <u>$]\alpha,1]$ est stable par f_λ.</u>

<u>Remarque</u>.. Il n'est pas nécessaire ici d'évoquer la continuité de f_λ (... ou le théorème des V.I.)

c) On suppose h continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$ (I est un intervalle de $\mathbb{R}$)

1) Supposons : $\forall t \in \mathring{I}$, $m \leq h'(t) \leq M$

Alors $\forall (x,y) \in I^2$, $y \leq x \Rightarrow m(x-y) \leq h(x) - h(y) \leq M(x-y)$. $\Big\}$ bien noter $y \leq x$.

2) Supposons : $\forall x \in \mathring{I}$, $|h'(x)| \leq k$

Alors $\forall (x,y) \in I^2$, $|h(x) - h(y)| \leq k|x-y|$. $\Big\}$ ici x et y sont quelconques.

f_λ est continue et dérivable sur $[\alpha,1]$. $\forall x \in [\alpha,1]$, $f'_\lambda(x) = 1 - 3x^2\lambda$.

f'_λ est dérivable sur $[\alpha,1]$ et $\forall x \in [\alpha,1]$, $f''_\lambda(x) = -6x\lambda < 0$.

f'_λ est donc décroissante sur $[\alpha,1]$. $\forall x \in [\alpha,1]$, $1 - 3\lambda = f'_\lambda(1) \leq f'_\lambda(x) \leq f'_\lambda(\alpha)$

Donc $\forall t \in [\alpha,1]$, $0 \leq f'_\lambda(t) \leq f'_\lambda(\alpha)$

Par conséquent : $\forall (x,y) \in [\alpha,1]^2$, $y \leq x \Rightarrow 0\,(x-y) \leq f_\lambda(x) - f_\lambda(y) \leq (x-y)\, f'_\lambda(\alpha)$

Avec $y = \alpha$ on obtient : $\forall x \in [\alpha,1]$, $0 \leq f_\lambda(x) - f_\lambda(\alpha) \leq (x-\alpha)\, f'_\lambda(\alpha)$

Donc : $\forall x \in [\alpha,1]$, $0 \leq f_\lambda(x) - f_\lambda(\alpha) \leq (x-\alpha) f'_\lambda(\alpha)$.

Q3) a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha < v_{n+1} < v_n \leq 1$.

→ Pour $n=0$ il s'agit de montrer que : $\alpha < v_1 < v_0 \leq 1$; c'est à dire que : $\alpha < f_\lambda(c) < c \leq 1$.

$c \in]\alpha, 1]$ donc $f_\lambda(c) \in]\alpha, 1]$ (Q2 b)) ; en particulier $\alpha < f_\lambda(c)$.

$f_\lambda(c) - c = \lambda(\frac{1}{2} - c^3) < 0$ car $c > \alpha$ donne $c^3 > \frac{1}{2}$.

Finalement : $\alpha < f_\lambda(c) < c \leq 1$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$\alpha < v_{n+1} < v_n \leq 1$ et f_λ est strictement croissante sur $[0,1]$ donc sur $[\alpha, 1]$

Donc $\alpha = f_\lambda(\alpha) < f_\lambda(v_{n+1}) < f_\lambda(v_n) \leq f_\lambda(1) \underset{\text{déjà vu}}{\leq} 1$; finalement : $\alpha < v_{n+2} < v_{n+1} \leq 1$

ceci achève la récurrence.

$(v_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante et minorée par α ; $(v_n)_{n \geq 0}$ converge. Posons $\ell = \lim_{n \to +\infty} v_n$

$\ell \in [\alpha, 1]$ et $f_\lambda(\ell) = \ell$ (par continuité de f_λ !!) donc $\ell = \alpha$ (Q1).

$(v_n)_{n \geq 0}$ converge vers α.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_\lambda(v_n) - \alpha \leq (v_n - \alpha) f'_\lambda(\alpha)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_{n+1} - \alpha \leq (v_n - \alpha) f'_\lambda(\alpha)$.

Une récurrence simple donne alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n - \alpha \leq (v_0 - \alpha)(f'_\lambda(\alpha))^n$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underset{\text{voir Q3 a)}}{0 <} v_n - \alpha \leq (c - \alpha)(f'_\lambda(\alpha))^n$

c) L'inégalité précédente invite à choisir λ, [illegible] pour avoir a priori la meilleure, de telle manière à ce que $f'_\lambda(\alpha)$ soit minimal.

$f'_\lambda(\alpha) = 1 - 3\lambda\alpha^2$. $\lambda \mapsto 1 - 3\lambda\alpha^2$ est décroissante sur $]0, \frac{1}{3}]$, elle est donc minimale pour $\lambda = \frac{1}{3}$

Finalement, $f'_\lambda(\alpha)$ est minimal pour $\lambda = \frac{1}{3}$. Et alors $f'_\lambda(\alpha) = 1 - \alpha^2$

Q4) $v_0 = 0{,}8$; $v_1 \simeq 0{,}796$; $v_2 \simeq 0{,}794\,547\,221$; $v_3 \simeq 0{,}794\,013\,267$; $v_4 \simeq 0{,}793\,816\,173$;

$v_5 \simeq 0{,}793\,743\,310$; $v_6 \simeq 0{,}793\,716\,357$; $v_7 \simeq 0{,}793\,706\,384$; $v_8 \simeq 0{,}793\,702\,694$

(A partir de v_{17} : $0{,}793\,700\,526$)

$c^3 = 0{,}512 > \frac{1}{2} = \alpha^3$. $c > \alpha$; $c - \alpha > 0$. Montrons que : $c - \alpha < 7 \times 10^{-3}$ ou : $c < \alpha + 7 \times 10^{-3}$.

ou encore : $c^3 < (\alpha + 7 \times 10^{-3})^3$; c'est à dire : $(\alpha + 7.10^{-3})^3 - c^3 > 0$.

$(\alpha + 7.10^{-3})^3 - c^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2(7.10^{-3}) + \underbrace{3\alpha(7.10^{-3})^2 + (7.10^{-3})^3}_{>0\,!} - (0{,}8)^3 > \frac{1}{2} + 3\alpha^2(7.10^{-3}) - 0{,}512$

$(\alpha + 7.10^{-3})^3 - c^3 > 3\alpha^2(7.10^{-3}) - 12 \times 10^{-3} = 3.10^{-3}(7\alpha^2 - 4)$. Ne reste plus qu'à montrer que : $\alpha^2 \geq \frac{4}{7}$

Il suffit de montrer que : $(\frac{1}{2})^2 = (\alpha)^6 \geq (\frac{4}{7})^3$; c'est à dire : $\underset{\alpha \in]\alpha,1]}{7^3 \geq 4^4}$ ou $343 \geq 256$!

Finalement : $(\alpha + 7.10^{-3})^3 > c^3$; $\alpha + 7.10^{-3} > c$; $0 < c - \alpha < 7.10^{-3}$

$$0 < v_8 - \alpha \leq (c-\alpha)\left(f'_{\frac{1}{3}}(\alpha)\right)^8 < 7.10^{-3}(1-\alpha^2)^8 \leq 7.10^{-3}\left(1-\frac{4}{7}\right)^8 = 10^{-3}\frac{3^8}{7^7} < 8\times 10^{-6}$$

donc $\underline{\underline{0 < v_8 - \alpha < 10^{-3}\frac{3^8}{7^7} < 8\times 10^{-6}}}$

PARTIE II (Q1) a) $\forall t \in [0,1]$, $u_1(t) = u_0(t) + \frac{1}{3}(t - (u_0(t))^3) = \frac{1}{3}t$

$\forall t \in [0,1]$, $u_2(t) = u_1(t) + \frac{1}{3}(t - (u_1(t))^3) = \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}(t - (\frac{1}{3}t)^3) = \frac{2}{3}t - \frac{1}{81}t^3$

CL) $\underline{\underline{\forall t \in [0,1],\ u_1(t) = \frac{1}{3}t \text{ et } u_2(t) = \frac{2}{3}t - \frac{1}{81}t^3}}$

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto u_n(t)$ est polynomiale de degré 3^{n-1}.

→ C'est clair pour $n = 1$ (et 2)

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

u_n est polynomiale donc u_n^3 aussi ! u_{n+1} est alors une combinaison linéaire de fonctions polynomiales (u_n, $t \mapsto t$, u_n^3) ; donc u_{n+1} est une fonction polynomiale.

u_n est de degré 3^{n-1}, $t \mapsto t$ de degré 1 et u_n^3 de degré $3(3^{n-1}) = 3^n$; comme $3^n > 1$ et $3^n > 3^{n-1}$: u_{n+1} est de degré $3^n = 3^{(n+1)-1}$. Ceci achève la récurrence.

(Q2) a) Rappel.. Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$

$t^{1/3} - u_{n+1}(t) = t^{1/3} - u_n(t) - \frac{1}{3}\left[(t^{1/3})^3 - u_n^3(t)\right] = \left[t^{1/3} - u_n(t)\right]\left(1 - \frac{1}{3}\left[(t^{1/3})^2 + t^{1/3}u_n(t) + u_n^2(t)\right]\right)$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,1]$, $t^{1/3} - u_{n+1}(t) = \left[t^{1/3} - u_n(t)\right]\left(1 - \frac{1}{3}\left[t^{2/3} + t^{1/3}u_n(t) + u_n^2(t)\right]\right)$

b) Soit $t \in [0,1]$. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n(t) \leq t^{1/3}$

→ C'est clair pour $n = 0$ ($u_0(t) = 0$)

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{3}\left[t - (u_n(t))^3\right] = \underbrace{\underset{\geq 0}{u_n(t)} + \frac{1}{3}\underset{\geq 0}{(t^{1/3} - u_n(t))}\,\underset{\geq 0}{(t^{2/3} + t^{1/3}u_n(t) + u_n^2(t))}}_{\text{H.R.}}$$

Donc $u_{n+1}(t) \geq 0$

$t^{1/3} - u_{n+1}(t) = \left[t^{1/3} - u_n(t)\right]\left(1 - \frac{1}{3}\left[t^{2/3} + t^{1/3}u_n(t) + u_n^2(t)\right]\right)$.

$t^{1/3} - u_n(t) \geq 0$ donc le signe de $t^{1/3} - u_{n+1}(t)$ est celui de la parenthèse ".

$t^{2/3} + t^{1/3}u_n(t) + u_n^2(t) \leq t^{2/3} + t^{1/3}t^{1/3} + (t^{1/3})^2 = 3t^{2/3}$ (H.R.)

$1 - \frac{1}{3}\left[t^{2/3} + t^{1/3}u_n(t) + u_n^2(t)\right] \geq 1 - \frac{1}{3}3t^{2/3} = 1 - t^{2/3} \geq 0$.

Finalement : $t^{1/3} - u_{n+1}(t) \geq 0$. Ceci achève la récurrence.

c] Soit $t \in [0,1]$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(t) - u_n(t) = \frac{1}{3}\left[t - (u_n(t))^3\right] \geq 0$

et d] $\qquad u_n(t) \leq t^{1/3}$ donc $u_n^3(t) \leq t$

La suite $(u_n(t))_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par $t^{1/3}$, elle converge. Notons ℓ_t sa limite. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{3}\left[t - (u_n(t))^3\right]$.

À la limite : $\ell_t = \ell_t + \frac{1}{3}(t - \ell_t^3)$; $t - \ell_t^3 = 0$; $\ell_t^3 = t$; $\ell_t = \sqrt[3]{t} = t^{1/3}$.

Finalement $\underline{\underline{(u_n(t))_{n\geq 0} \text{ converge vers } t^{1/3}}}$.

Q3 Soit $t \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $t^{1/3} - u_{n+1}(t) = \left[t^{1/3} - u_n(t)\right]\left(1 - \frac{1}{3}\left[t^{2/3} + t^{1/3}u_n(t) + (u_n(t))^2\right]\right)$

évident !

Comme $0 \leq u_n(t) \leq t^{1/3}$: $\frac{1}{3}t^{2/3} \leq \frac{1}{3}\left[t^{2/3} + t^{1/3}u_n(t) + (u_n(t))^2\right] \leq \frac{1}{3}\left[t^{2/3} + t^{1/3}t^{1/3} + t^{2/3}\right] = t^{2/3}$

donc : $1 - t^{2/3} \leq 1 - \frac{1}{3}\left[t^{2/3} + t^{1/3}u_n(t) + (u_n(t))^2\right] \leq 1 - \frac{1}{3}t^{2/3}$.

En multipliant par $t^{1/3} - u_n(t)$ qui est positif on obtient :

$$(1 - t^{2/3})(t^{1/3} - u_n(t)) \leq t^{1/3} - u_{n+1}(t) \leq \left(1 - \frac{1}{3}t^{2/3}\right)(t^{1/3} - u_n(t)).$$

Montrons maintenant par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t^{1/3}(1 - t^{2/3})^n \leq t^{1/3} - u_n(t) \leq t^{1/3}\left(1 - \frac{1}{3}t^{2/3}\right)^n$

→ C'est clair pour $n = 0$ ($u_0(t) = 0$ donc les 3 membres sont égaux à $t^{1/3}$)

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons-la pour $n+1$.

$$\begin{cases} 0 \leq 1 - t^{2/3} \leq 1 - \frac{1}{3}\left[t^{2/3} + t^{1/3}u_n(t) + u_n(t)^2\right] \leq 1 - \frac{1}{3}t^{2/3} & \text{(voir plus haut)} \\ 0 \leq t^{1/3}(1 - t^{2/3})^n \leq t^{1/3} - u_n(t) \leq t^{1/3}\left(1 - \frac{1}{3}t^{2/3}\right)^n & \text{(H.R.)} \end{cases}$$

En multipliant ces inégalités "positives" on obtient :

$t^{1/3}(1 - t^{2/3})^{n+1} \leq t^{1/3} - u_{n+1}(t) \leq t^{1/3}\left(1 - \frac{1}{3}t^{2/3}\right)^{n+1}$, ce qui achève la récurrence.

Q4 a] $n \in \mathbb{N}^*$. φ_n est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $\varphi_n'(x) = \left(1 - \frac{1}{3}x^2\right)^n + x\, n \times \frac{-2}{3}x\left(1 - \frac{1}{3}x^2\right)^{n-1}$

$\forall x \in [0,1]$, $\varphi_n'(x) = \left(1 - \frac{1}{3}x^2\right)^{n-1}\left[1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}n x^2\right] = \left(1 - \frac{1}{3}x^2\right)^{n-1}\left(1 - \frac{2n+1}{3}x^2\right)$

$\forall x \in [0,1]$, $\varphi_n'(x) = \frac{2n+1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}x^2\right)^{n-1}\left(\sqrt{\frac{3}{2n+1}} - x\right)\left(\sqrt{\frac{3}{2n+1}} + x\right)$

Le signe de φ_n' sur $[0,1]$ est celui de $x \mapsto \sqrt{\frac{3}{2n+1}} - x$ ($x \in [0,1]$ donne $1 - \frac{1}{3}x^2 > 0$)

1er cas : $n > 1$. $0 < \sqrt{\frac{3}{2n+1}} < 1$.

x	0		$\sqrt{3/(2n+1)}$		1
$\varphi_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi_n(x)$	0	↗		↘	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\max_{x \in [0,1]} \varphi_n(x) = \varphi_n\left(\sqrt{\frac{3}{2n+1}}\right)$

2e cas : $n = 1$. $\sqrt{\frac{3}{2n+1}} = 1$.

x	0		1
$\varphi_1'(x)$		$+$	0
$\varphi_1(x)$	0	↗	$(2/3)$

$\max_{x \in [0,1]} \varphi_1(x) = \varphi_1(1) = \varphi_1\left(\sqrt{\frac{3}{2n+1}}\right)$

Dans les deux cas $\max_{x\in[0,1]} \varphi_n(x) = \varphi_n\left(\sqrt{\frac{1}{2n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall t\in[0,1]$, $t^{1/3}-u_n(t) \le \varphi_n(t^{1/3}) \le \sqrt{\frac{1}{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$

$\forall t\in[0,1]$, $t^{1/3}-u_n(t) \le \sqrt{\frac{1}{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$

Donc $\beta_n = \sup_{t\in[0,1]}\left[t^{1/3}-u_n(t)\right] \le \sqrt{\frac{1}{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \underset{2n \le 2n+1\ !}{\le} \sqrt{\frac{1}{2n}}\,(1)^n = \sqrt{1/2n}$

Donc $\beta_n \le \sqrt{\frac{1}{2n}}$.

c) $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in[0,1]$, $t^{1/3}(1-t^{2/3})^n \le t^{1/3}-u_n(t) \le \sup_{t\in[0,1]}\left(t^{1/3}-u_n(t)\right) = \beta_n$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in[0,1]$, $t^{1/3}(1-t^{2/3})^n \le \beta_n$; $\sup_{t\in[0,1]} t^{1/3}(1-t^{2/3})^n \le \beta_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Fixons $n\in\mathbb{N}^*$.

$t\mapsto t^{1/3}$ définit une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$ donc $\sup_{t\in[0,1]} t^{1/3}(1-t^{2/3})^n = \sup_{x\in[0,1]} x(1-x^2)^n$.

Considérons la fonction ψ_n définie sur $[0,1]$ par $\forall x\in[0,1]$, $\psi_n(x)=x(1-x^2)^n$.

$\forall x\in[0,1]$, $\psi_n'(x) = (1-x^2)^n + x\,n(-2x)(1-x^2)^{n-1} = (1-x^2)^{n-1}\left[1-x^2-2nx^2\right] = (2n+1)(1-x^2)^{n-1}\left(\frac{1}{2n+1}-x^2\right)$

x	0		$\sqrt{1/2n+1}$		1
$\psi_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$\psi_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$\sup_{x\in[0,1]} x(1-x^2)^n = \max_{x\in[0,1]}\left(x(1-x^2)^n\right) = \psi_n\left(\sqrt{\frac{1}{2n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\beta_n \ge \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sqrt{n}\,\beta_n \ge \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$. Essayons donc de minorer $\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n\right)_{n\ge1}$ par une constante >0.

$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$, $\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n = e^{n\ln\frac{2n}{2n+1}}$ et $n\ln\frac{2n}{2n+1} \sim n\left(\frac{2n}{2n+1}-1\right) = -\frac{n}{2n+1} \sim -\frac{1}{2}$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$.

Donc si $k\in\left]0,\frac{1}{\sqrt{2e}}\right[$, $\exists p\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n\ge p \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \ge k$.

Soit $k\in\left]0,\frac{1}{\sqrt{2e}}\right[$. Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $r_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$.

$\exists p\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n\ge p \Rightarrow r_n \ge k$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $r_n \ge \min(r_1,r_2,\dots,r_{p-1},k)$. Posons $\gamma = \min(r_1,r_2,\dots,r_{p-1},k)$. $\gamma>0$ et

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sqrt{n}\,\beta_n \ge r_n \ge \gamma$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\beta_n \ge \frac{\gamma}{\sqrt{n}}$.

d) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\beta_n \ge \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n > e^{-1/2}$; c'est-à-dire que :

$n \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) > -\frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{2n}{n+1} \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ (!) donc $\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) > 1 - \frac{1}{\frac{2n}{2n+1}} = 1 - \frac{2n+1}{2n} = -\frac{1}{2n}$.

Donc $n \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) > -\frac{1}{2}$ ... cqfd.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\delta_n \leq \sqrt{\frac{3}{2n+1}} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n = \sqrt{\frac{3}{2n+1}} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n$

Montrons alors que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \leq \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^p$

C'est-à-dire que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow n \ln\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \leq p \ln\left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)$.

Il suffit de montrer que : $f : x \mapsto x \ln\left(1 - \frac{1}{2x+1}\right)$ est décroissante sur $[1, +\infty[$!

$\forall x \in [1, +\infty[$, $f(x) = x \ln 2x - x \ln(2x+1)$

$\forall x \in [1, +\infty[$, $f'(x) = \ln 2x + x \times \frac{2}{2x} - \ln(2x+1) - x \times \frac{2}{2x+1} = 1 - \frac{2x}{2x+1} + \ln \frac{2x}{2x+1}$

$\forall x \in [1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2x+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{2x+1}\right) \leq \frac{1}{2x+1} + 1 - \frac{1}{2x+1} - 1 = 0$! cqfd !

Finalement : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow e^{-1/2} \sqrt{\frac{1}{2n+1}} < \delta_n \leq \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^p \sqrt{\frac{3}{2n+1}}$.

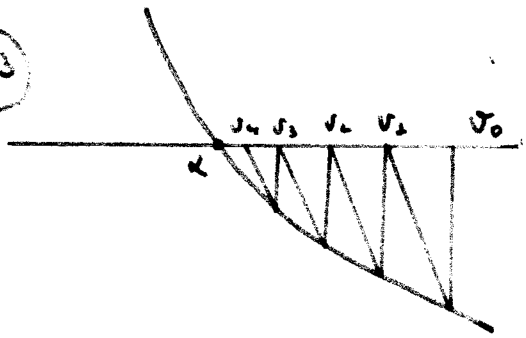
III Q1 $y = k(x-a) + g(a)$ est une équation de Δ. donc $0 = k(\beta - a) + g(a)$.

Finalement $\beta = a - \frac{1}{k} g(a) = \underline{\underline{a - \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2} - a^3\right)}}$

Q2 Rappel.. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + \lambda\left(\frac{1}{2} - v_n^3\right)$.

Si $n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection avec $(x'x)$, de la droite de coefficient directeur $-\frac{1}{\lambda}$ (!) qui passe par le point de Γ d'abscisse v_n.

Q3



← Voir à ce sujet cours - Calcul différentiel p II.15 et suivantes.

Q4 La convergence est d'ordre 1 pour cette méthode alors qu'elle est d'ordre 2 pour Newton. La convergence est donc moins rapide. Cela étant cette méthode n'utilise que la fonction... et pas sa dérivée