Dans la première partie du problème, on approche le nombre réel $\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$ à l'aide d'une suite numérique. Dans la seconde partie, grâce à cette méthode, on approche sur l'intervalle $[0, 1]$ la fonction $t \mapsto t^{1/3}$ à l'aide d'une suite de fonctions polynomiales et on évalue la rapidité de la convergence.

On notera qu'une valeur approchée de α à la précision 10^{-9} est 0,793 700 526.

I. Approximation de α

Soit λ un nombre réel strictement positif. On considère la fonction numérique f_λ définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par la relation :

$$f_\lambda(x) = x + \lambda\left(\frac{1}{2} - x^3\right).$$

1) Montrer que α est l'unique solution de l'équation $f_\lambda(x) = x$.

2) *a*) Calculer la dérivée de f_λ. Montrer que f_λ est croissante sur $[0, 1]$ si et seulement si $\lambda \leqslant \frac{1}{3}$. On suppose désormais que cette condition est satisfaite. montrer que f_λ est strictement croissante sur $[0,1]$.

b) Prouver que l'intervalle $]\alpha, 1]$ est stable par f_λ, c'est-à-dire que :

$$f_\lambda(]\alpha, 1]) \subset]\alpha, 1].$$

c) Donner deux versions de l'inégalité des accroissements finis pour une application h de I dans IR.

Montrer que, pour tout élément x de $[\alpha, 1]$:

$$0 \leqslant f_\lambda(x) - \alpha \leqslant (x - \alpha) f'_\lambda(\alpha).$$ (étudier les variations de f'_λ)

3) Soient c un élément de $]\alpha, 1]$ et v la suite définie par la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = v_n + \lambda\left(\frac{1}{2} - v_n^3\right)$$

et la condition initiale $v_0 = c$. (montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha < v_{n+1} < v_n \leq 1$)

a) Montrer que la suite v est strictement décroissante et qu'elle converge vers α.

b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n:

$$0 < v_n - \alpha \leqslant (c - \alpha)[f'_\lambda(\alpha)]^n.$$

c) Montrer que $f'_\lambda(\alpha)$ est minimal si et seulement si $\lambda = \frac{1}{3}$.

4) On suppose que $\lambda = \frac{1}{3}$ et on prend $v_0 = c = 0{,}8$. Calculer v_n pour $n \leqslant 8$.

Montrer que $0 < c - \alpha < 7 \cdot 10^{-3}$ et majorer $v_8 - \alpha$. (Dans cette question, on n'utilisera pas la valeur approchée de α donnée en tête de l'énoncé.)

[noter que : $(\alpha + 7.10^{-3})^3 - c^3 > -0{,}012 + 3\alpha^2 \times 7 \times 10^{-3} > \ldots$]

II. Approximation polynomiale de $t \mapsto t^{1/3}$

Pour tout élément t de l'intervalle $[0, 1]$, on considère la suite $(u_n(t))$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{3}[t - u_n(t)^3]$$ ← ⚠ $u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{3}\left[t - (u_n(t))^3\right]$

et la condition initiale $u_0(t) = 0$.

1) *a*) Calculer $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

b) Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n nonnul la fonction $t \mapsto u_n(t)$ est une fonction polynomiale et calculer son degré. ← ... pour le degré !

2) *a*) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n:

$$t^{1/3} - u_{n+1}(t) = [t^{1/3} - u_n(t)]\left(1 - \frac{1}{3}[t^{2/3} + t^{1/3}u_n(t) + u_n(t)^2]\right).$$

b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $0 \leq u_n(t) \leq t^{1/3}$.

c) En déduire que la suite de terme général $u_n(t)$ est croissante.

d) Montrer que la suite $(u_n(t))$ converge vers $t^{1/3}$.

3) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n:

$$t^{1/3}(1-t^{2/3})^n \leq t^{1/3} - u_n(t) \leq t^{1/3}\left(1-\frac{1}{3}t^{2/3}\right)^n.$$

4) Pour tout nombre entier naturel non nul n, soit φ_n l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ définie par la relation :

$$\varphi_n(x) = x\left(1-\frac{1}{3}x^2\right)^n.$$

Questions à fort barème

($\simeq$ 6/20 pour Q3+Q4)

a) Étudier la variation de φ_n et déterminer son maximum.

b) On pose $\beta_n = \sup_{t \in [0,1]} [t^{1/3} - u_n(t)]$.

Montrer que $\beta_n \leq \sqrt{\dfrac{3}{2n}}$.

c) Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif γ tel que, pour tout nombre entier naturel non nul n, $\beta_n \geq \dfrac{\gamma}{\sqrt{n}}$.

// Étudier $\max_{x\in[0,1]}$ de $(1-x^2)^n$

d) Plus précisément, soit p un nombre entier naturel non nul. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n tel que $n \geq p$, on a :

$$e^{-1/2}\sqrt{\frac{1}{2n+1}} < \beta_n \leq \left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^p \sqrt{\frac{3}{2n+1}}.$$

// Rappel.. Si $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

$1 - \dfrac{1}{x} < \ln x < x-1$

III Facultatif..

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{2} - x^3$ dans $\mathscr{P}$ rapporté au repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$. α est clairement le zéro de g sur $\mathbb{R}$.

Q1.. Soit $k \in \mathbb{R}^*$.

Trouver l'abscisse b du point d'intersection, avec Ox, de la droite Δ de coefficient directeur k qui passe par le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a $(a \in \mathbb{R})$

Q2.. Donner une interprétation géométrique de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ de I

Q3.. Illustrer par un dessin la méthode utilisée.

Q4.. Comparer avec la méthode Newton (Avantage / Inconvénient)