Remarques.. 1.- Dans la 1ère partie j'utiliserai davantage la notion de polynôme que de fonction polynôme. Par exemple (1) deviendra $(X^2-1)P''+4XP'=\lambda P$.
Je signale encore que $P=P(X)$ n'est pas un abus mais la résultante d'une composition.

2.- Le problème propose l'étude du spectre et des vecteurs propres de l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $\forall P\in\mathbb{R}[X]$, $\varphi(P)=(X^2-1)P''+4XP'$, dans sa 1ère partie.

I ETUDE DE L'EQUATION (1)

Q1 a) Soit $P\in\mathbb{R}[X]-\{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Posons $n=\deg P$.

$\deg(X^2-1)P''\leq n$ et $\deg(4XP')\leq n$ donc $\deg((X^2-1)P''+4XP')\leq n$.
(oui ! oui ! pas toujours $=n$ ... dans le cas où $P''=0$...)

Soit a_n le coefficient de X^n dans P ; $a_n\neq 0$ car $\deg P=n$. $n(n-1)a_n$ est le coefficient de X^n dans $(X^2-1)P''$ et $4na_n$ est le coefficient de X^n dans $4XP'$.
Par conséquent $n(n-1)a_n+4na_n=n(n+3)a_n$ est le coefficient de X^n dans $(X^2-1)P''+4XP'$.
λa_n est encore le coefficient de X^n dans $(X^2-1)P''+4XP'$ car $(X^2-1)P''+4XP'=\lambda P$.
Par conséquent $n(n+3)a_n=\lambda a_n$ ce qui donne $\underline{\lambda=n(n+3)}$ (car $a_n\neq 0$).

b) $\underline{Q=(-1)^n P(-X)}$. $Q\in\mathbb{R}[X]$, $Q'=(-1)^{n+1}P'(-X)$ et $Q''=(-1)^{n+2}P''(-X)=(-1)^nP''(-X)$.

Notons que Q vérifie (1).

$(X^2-1)Q''+4XQ'=(X^2-1)(-1)^nP''(-X)+4X(-1)^{n+1}P'(-X)=(-1)^n[(X^2-1)P''(-X)-4XP'(-X)]$

P vérifie (1) donc $(X^2-1)P''(X)+4XP'(X)=\lambda P(X)$; par conséquent : $(X^2-1)P''(-X)+4(-X)P'(-X)=\lambda P(-X)$

Ceci donne : $(X^2-1)Q''+4XQ'=(-1)^n\lambda P(-X)=\lambda(-1)^nP(-X)=\lambda Q$.

Ceci achève de prouver que Q vérifie (1).

Prouvons que $P-Q$ vérifie (1) (voir à ce sujet la remarque 3 en fin de page ... ou la remarque 2)

$P-Q\in\mathbb{R}[X]$ et $(X^2-1)(P-Q)''+4X(P-Q)'=(X^2-1)P''+4XP'-((X^2-1)Q''+4XQ')=\lambda P-\lambda Q=\lambda(P-Q)$ ... cqfd.

$\deg P=\deg Q=n$ donc $\deg(P-Q)\leq n$.

$P-Q=P(X)-(-1)^nP(-X)$. Si a_n est le coefficient de X^n dans P, $a_n-(-1)^na_n(-1)^n=0$ est le coefficient de X^n dans $P-Q$ donc $\deg(P-Q)<n$!

Supposons $P-Q\neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et posons $k=\deg(P-Q)$. $k(k+3)=\lambda=n(n+3)$ car $P-Q$ vérifie (1) donc $k=n$ ce qui est contradictoire car $k=\deg(P-Q)<n$.
($x\mapsto x(x+3)$ est strictement croissante donc injective sur $\mathbb{R}_+$)

Finalement $P-Q=0_{\mathbb{R}[X]}$; $P=Q$.

Donc $\underline{P(X)=(-1)^nP(-X)}$.

$\underline{P \text{ a donc la parité de } n}$.

Remarque.. 3.. $\{P\in\mathbb{R}[X] \mid P \text{ vérifie } (1)\}=\{P\in\mathbb{R}[X]\mid \varphi(P)=\lambda P\}=\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]})$ (voir remarque 2)

donc cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Ceci rend clair "P vérifie (1) et Q vérifie (1) donne P-Q vérifie (1)".

Q2 a) Déterminons (etc) P_0, P_1, P_2 ... il faut aussi prouver l'existence et l'unicité de ces polynômes !

1er cas... $n=0$ → Supposons P solution du problème. $P\in\mathbb{R}[X]$, $\deg P=0$ et le coefficient de X^0 est 1 donc $P=1$ ... d'où l'unicité.

→ Posons $P=1$. $P\in\mathbb{R}[X]$! et $(X^2-1)P''+4XP'=0_{\mathbb{R}[X]}=0(0+3)P$; P vérifie (1) est de degré 0 et le coefficient de X^0 dans P est 1. P est solution du problème.

Finalement le problème admet une solution et une seule $\underline{\underline{P_0=1}}$.

2ème cas... $n=1$. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré 1 dont le coefficient de X^1 est 1.

$\exists a\in\mathbb{R},\ P=X+a$

P vérifie (1) $\Leftrightarrow (X^2-1)\times 0_{\mathbb{R}[X]}+4X\times 1=1(1+3)(X+a) \Leftrightarrow 4X=4X+4a \Leftrightarrow a=0$

$\underline{\underline{P_1=X}}$ est l'unique polynôme de degré 1 dont le coefficient de X^1 est 1 qui vérifie (1) !

3ème cas... $n=2$. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré 2 dont le coefficient de X^2 est 1. $\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ P=X^2+aX+b$.

P vérifie (1)

$\Updownarrow$

$(X^2-1)(2)+4X(2X+a)=2(2+3)(X^2+aX+b)$

$\Updownarrow$

$10X^2+4aX-2=10X^2+10aX+10b$

$\Updownarrow$

$4a=10a$ et $-2=10b$

$\Updownarrow$

$a=0$ et $b=-\frac{1}{5}$

$\underline{\underline{P_2=X^2-\frac{1}{5}}}$ est l'unique polynôme de degré 2 dont le coefficient de X^2 est 1 qui vérifie (1)

b) Posons donc $P_n=\sum_{k=0}^{E(n/2)} a_{2k}X^{n-2k}$ avec $a_0=1$ (ce qui pourtant déjà l'existence de P_n !)

$\deg P_n=n$ et le coefficient de X^n dans P_n est $a_0=1$.

P_n vérifie (1) — à un abus près ... $k=\frac{n}{2}$ ou $k=\frac{n-1}{2}$ — à 0 ou 1 abus près $(k=\frac{n}{2})$

$\Updownarrow$

$$(X^2-1)\sum_{k=0}^{E(n/2)} a_{2k}(n-2k)(n-2k-1)X^{n-2k-2}+4X\sum_{k=0}^{E(n/2)} a_{2k}(n-2k)X^{n-2k-1}=n(n+3)\sum_{k=0}^{E(n/2)} a_{2k}X^{n-2k}$$

$\Updownarrow$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{E(n/2)} a_{2k}(n-2k)(n-2k-1)X^{n-2k}}_{(\alpha)}-\underbrace{\sum_{k=0}^{E(n/2)} a_{2k}(n-2k)(n-2k-1)X^{n-2k-2}}_{(\beta)}+4\underbrace{\sum_{k=0}^{E(n/2)} a_{2k}(n-2k)X^{n-2k}}_{(\gamma)}=n(n+3)\sum_{k=0}^{E(n/2)} a_{2k}X^{n-2k}$$

$\Updownarrow$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{E(n/2)} a_{2k}(n-2k)(n-2k-1+4)X^{n-2k}}_{(\alpha)+(\gamma)}-\underbrace{\sum_{i=1}^{E(n/2)+1} a_{2(i-1)}(n-2i+2)(n-2i+1)X^{n-2i}}_{i=k+1 \text{ dans } (\beta)}=n(n+3)\sum_{k=0}^{E(n/2)} a_{2k}X^{n-2k}$$

Remarquons que dans le second Σ si $i=E(\frac{n}{2})+1$ ou $n=2p$ et : $n-2i+2=0$, ou $n=2p+1$ et : $n-2i+1=0$. Nous pouvons donc dire que : P_n vérifie (1) si et seulement si :

$$\sum_{k=0}^{E(n/2)} a_{2k}(n-2k)(n-2k+3)X^{n-2k}-\sum_{i=1}^{E(n/2)} a_{2(i-1)}(n-2i+2)(n-2i+1)X^{n-2i}=n(n+3)\sum_{k=0}^{E(n/2)} a_{2k}X^{n-2k}$$

P_n vérifie (1)

$\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{E(n/2)} a_{2k}\left[(n-2k)(n-2k+3)-n(n+3)\right]X^{n-2k} = \sum_{i=1}^{E(n/2)} a_{2(i-1)}(n-2i+2)(n-2i+1)X^{n-2i} = \sum_{k=1}^{E(n/2)} a_{2(k-1)}(n-2k+2)(n-2k+1)X^{n-2k}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0\left[(n-0)(n+3)-n(n+3)\right]=0 \quad \text{(soit } 0=0\text{ !)} \\ \text{et} \\ \forall k\in [\![1,E(\frac{n}{2})]\!],\ a_{2k}\left[\underbrace{(n-2k)(n-2k+3)-n(n+3)}_{2k(2k-3-2n)\neq 0}\right] = (n-2k+2)(n-2k+1)\,a_{2(k-1)} \end{cases}$

$\Leftrightarrow$

$$\forall k\in [\![1,E(\tfrac{n}{2})]\!],\quad a_{2k} = -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2k(2n-2k+3)}\,a_{2(k-1)}$$

Or $\left(a_0=1 \text{ et } \forall k\in [\![1,E(\frac{n}{2})]\!],\ a_{2k}=\dfrac{-(n-2k+2)(n-2k+1)}{2k(2n-2k+3)}\,a_{2(k-1)}\right)$ définit par récurrence une unique suite $a_0, a_1, \dots, a_{E(\frac{n}{2})}$ de réels.

Donc il existe un unique polynôme P_n de degré n dont le coefficient de X^n est 1 et qui vérifie (1).

Davantage pour les amateurs.

$$a_{2k} = -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2k(2n-2k+3)}\times -\frac{(n-2k+4)(n-2k+3)}{2(k-1)(2n-2k+5)}\times -\frac{(n-2k+6)(n-2k+5)}{2(k-2)(2n-2k+7)}\times\cdots\times -\frac{n(n-1)}{2\times 1(2n+1)}\,a_0$$

. Ce qui donne $a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{2^k k!}\times\dfrac{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+3)}$ ← On bouche les trous en bas !

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^k k!}(2k)!\times\frac{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{(2k)!}\times\frac{(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots(2n-2k+4)(2n-2k+2)}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+3)(2n-2k+2)}$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^k k!}(2k)!\times C_n^{2k}\times\frac{2^k\, n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{C_{2n+1}^{2k}\times(2k)!} = \frac{(-1)^k}{k!}\,C_n^{2k}\times\frac{C_n^k\times k!}{C_{2n+1}^{2k}} = \frac{(-1)^k C_n^{2k}C_n^k}{C_{2n+1}^{2k}}$$

Il ne reste plus qu'à prouver ce résultat par récurrence !

- Pour $k=0$: $a_{2k}=1$ et $(-1)^k\dfrac{C_n^{2k}C_n^k}{C_{2n+1}^{2k}} = 1\,\dfrac{1\times 1}{1} = 1$! L'égalité est vraie pour $k=0$.

- Supposons que $a_{2k} = (-1)^k\dfrac{C_n^{2k}C_n^k}{C_{2n+1}^{2k}}$ pour $k\in [\![1,E(\frac{n}{2})-1]\!]$ et vérifions que : $a_{2k+2} = (-1)^{k+1}\dfrac{C_n^{2k+2}C_n^{k+1}}{C_{2n+1}^{2k+2}}$.

$$a_{2k+2} = (-1)\frac{(n-2(k+1)+2)(n-2(k+1)+1)}{2(k+1)(2n-2(k+1)+3)}\,a_{2k} = -\frac{(n-2k)(n-2k-1)}{2(k+1)(2n-2k+1)}\,(-1)^k\,\frac{C_n^{2k}C_n^k}{C_{2n+1}^{2k}}.$$

$$C_n^{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1}\,\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n-k}{k+1}C_n^k\ ;\quad C_n^{2k+2} = \frac{n!}{(2k+2)!(n-2k-2)!} = \frac{(n-2k)(n-2k-1)}{(2k+2)(2k+1)}\times C_n^{2k}$$

$$C_{2n+1}^{2k+2} = \frac{(2n+1)!}{(2k+2)!(2n+1-2k-2)!} = \frac{(2n+1)!}{(2k+2)!(2n-2k-1)!} = \frac{(2n+1-2k)(2n-2k)}{(2k+2)(2k+1)}\times\frac{(2n+1)!}{(2k)!(2n+1-2k)!} = \frac{(2n+1-2k)(2n-2k)}{(2k+2)(2k+1)}\,C_{2n+1}^{2k}$$

$$\frac{C_n^{2k+2}\times C_n^{k+1}}{C_{2n+1}^{2k+2}} = \frac{(n-2k)(n-2k-1)}{(2k+2)(2k+1)}\times\frac{n-k}{k+1}\times\frac{(2k+2)(2k+1)}{(2n+1-2k)(2n-2k)}\times\frac{C_n^{2k}C_n^k}{C_{2n+1}^{2k}} = \frac{(n-2k)(n-2k-1)}{(k+1)(2n+1-2k)\times 2}\,\frac{C_n^{2k}C_n^k}{C_{2n+1}^{2k}} \qquad \text{(A)}$$

donc $a_{2k+2} = -\dfrac{(n-2k)(n-2k-1)}{2(k+1)(2n-2k+1)}(-1)^k \dfrac{C_n^{2k}C_n^{k}}{C_{2n}^{2k}} = (-1)^{k+1} \times \dfrac{(n-2k)(n-2k-1)}{(k+1)(2n-2k+1)\times 2}\dfrac{C_n^{2k}C_n^{k}}{C_{2n}^{2k}}$

(A) donne alors $a_{2k+2} = (-1)^{k+1}\dfrac{C_n^{2k+2}C_n^{k+1}}{C_{2n}^{2k}}$ ce qui achève la récurrence.

Finalement : $\forall k \in [\![0, E(\frac{n}{2})]\!],\quad a_{2k} = (-1)^k \dfrac{C_n^{2k}C_n^{k}}{C_{2n}^{2k}}$

$a_2 = \dfrac{-(n-2+2)(n-2+1)}{2(2n-2+3)}a_0 = -\dfrac{n(n-1)}{2(2n+1)}$ $\qquad a_2 = -\dfrac{n(n-1)}{2(2n+1)}$.

(Q3) Posons $S = \{n(n+3) \,;\, n \in \mathbb{N}\}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

1er cas.. $\lambda \notin S$. Ce qui précède montre que $0_{\mathbb{R}[X]}$ est le seul élément de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant (1)
$E_\lambda = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ (λ n'est pas valeur propre de φ).

2ème cas.. $\lambda \in S$. $\exists n \in \mathbb{N}$, $\lambda = n(n+3)$. $P_n \in E_\lambda$ et donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha P_n \in E_\lambda$.
Par conséquent $\mathrm{Vect}(P_n) \subset E_\lambda$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit $P \in E_\lambda$.

ou $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et donc $P \in \mathrm{Vect}(P_n)$. Supposons $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et posons $k = \deg P$.

$k(k+3) = \lambda = n(n+3)$ donc $k = n$. $\deg P = n$. Soit a_n le coefficient de X^n dans P.
$\frac{1}{a_n}P$ est de degré n, son coefficient de X^n est 1 et il vérifie (1) ; donc $\frac{1}{a_n}P = P_n$; $P = a_n P_n$
Par conséquent $P \in \mathrm{Vect}(P_n)$.

Finalement $E_\lambda = \mathrm{Vect}(P_n)$.

Remarque.. 4.. Le spectre de φ est $\{n(n+3) \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ le sous-espace propre associé à la valeur propre $n(n+3)$ est $\mathrm{Vect}(P_n)$.

Notons que φ est diagonalisable car il existe une base de $\mathbb{R}[X]$ constituée de vecteurs propres : $(P_n)_{n \geqslant 0}$. Il s'agit maintenant de se donner un moyen récurrent permettant d'obtenir les polynômes P_n.

(Q4) a) $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $Q_n = (X^2-1)P_n' - nXP_n$.

Ecrivons $P_n = X^n + a_2X^{n-2} + R$ où $R \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg R < n-2$.

$Q_n = (X^2-1)(nX^{n-1} + (n-2)a_2X^{n-3} + R') - nX(X^n + a_2X^{n-2} + R)$

$Q_n = \underline{n}X^{n+1} + (n-2)\underset{=}{a_2}X^{n-1} - \underset{=}{n}X^{n-1} - (n-2)a_2X^{n-3} + (X^2-1)R' - \underline{n}X^{n+1} - n\underset{=}{a_2}X^{n-1} - nXR$

$Q_n = -(2a_2+n)X^{n-1} - (n-2)a_2X^{n-3} + (X^2-1)R' - nXR$

$Q_n = -(2a_2+n)X^{n-1} + S$ où $S = -(n-2)a_2X^{n-3} + (X^2-1)R' - nXR$. $\deg R < n-2$ donc $\deg S < n-1$

de plus $-(2a_2+n) = -2a_2 - n = \dfrac{n(n-1)}{2n+1} - n = -\dfrac{n(n+2)}{2n+1} \neq 0$.

Par conséquent $\deg Q_n = n-1$ et son monôme de plus haut degré est : $-\frac{n(n+2)}{2n+1}X^{n-1}$.

Notons que la relation (4) signifie que $Q_n = -\frac{n(n+2)}{2n-1}P_{n-1}$. Tout est clair il s'agit maintenant de prouver que : $(X^2-1)Q_n'' + 4XQ_n' = (n-1)[(n-1)+3]Q_n$!

On se calme et on reprend.

$Q_n = (X^2-1)P_n' - nXP_n$. $Q_n' = 2XP_n' + (X^2-1)P_n'' - nP_n - nXP_n'$

$Q_n' = 2XP_n' - 4XP_n' + n(n+3)P_n - nP_n - nXP_n' = (n+2)[-XP_n' + nP_n]$. $\underline{\underline{Q_n' = (n+2)[nP_n - XP_n']}}$

$(X^2-1)P_n'' = -4XP_n' + n(n+3)P_n$

Calculons Q_n''. $Q_n'' = (n+2)[nP_n' - P_n' - XP_n''] = (n+2)(n-1)P_n' - (n+2)XP_n''$.

$(X^2-1)Q_n'' = (n+2)(n-1)(X^2-1)P_n' - (n+2)X((X^2-1)P_n'')$

$(X^2-1)Q_n'' = (n+2)(n-1)(X^2-1)P_n' - (n+2)X(-4XP_n' + n(n+3)P_n)$

$(X^2-1)Q_n'' + 4XQ_n' = (n+2)[(n-1)(X^2-1)P_n' + 4X^2P_n' - n(n+3)XP_n + 4XnP_n - 4X^2P_n']$

$(X^2-1)Q_n'' + 4XQ_n' = (n+2)[(n-1)(X^2-1)P_n' + (4n - n(n+3))XP_n] = (n+2)[(n-1)(X^2-1)P_n' - n(n-1)XP_n]$

$(X^2-1)Q_n'' + 4XQ_n' = (n+2)(n-1)((X^2-1)P_n' - nXP_n) = (n-1)((n-1)+3)Q_n$

Q3 montre alors que : $Q_n \in \mathrm{Vect}(P_{n-1})$. $\exists a \in \mathbb{R}$, $Q_n = aP_{n-1}$.

$\deg Q_n = \deg P_{n-1} = n-1$, le coefficient de X^{n-1} dans Q_n est $-\frac{n(n+2)}{2n+1}$ et 1 dans P_{n-1}

Par conséquent : $a = -\frac{n(n+2)}{2n+1}$. Finalement $\underline{\underline{Q_n = \frac{-n(n+2)}{2n+1}P_{n-1}}}$

Donc $(X^2-1)P_n' - nXP_n = Q_n = -\frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1}$

Par conséquent : $\underline{\underline{(X^2-1)P_n' - nXP_n + \frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1} = 0_{\mathbb{R}[X]}}}$ (4)

b) Par dérivation (4) donne $(X^2-1)P_n'' + 2XP_n' - nP_n - nXP_n' + \frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1}' = 0_{\mathbb{R}[X]}$

Or $(X^2-1)P_n'' = -4XP_n' + n(n+3)P_n$

Donc $-4XP_n' + n(n+3)P_n - nP_n + (2-n)XP_n' + \frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1}' = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Donc $\boxed{\underbrace{n(n+2)P_n - (n+2)XP_n'}_{} + \frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1}' = 0_{\mathbb{R}[X]}}$ (B)

Soit $Q_n' + \frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1}' = 0$! Etait-il bien utile de dériver (4) ?! ($Q_n = -\frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1}$)

N'épiloguons pas et retournons (B) que nous allons diviser par $n+2$ et multiplier par (X^2-1).

(4) donne $(X^2-1)P_n' = nXP_n - \frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1}$

$0_{\mathbb{R}[X]} = n(X^2-1)P_n - X(X^2-1)P_n' + \frac{n}{2n+1}(X^2-1)P_{n-1}' = n(X^2-1)P_n - nX^2P_n + \frac{n(n+2)}{2n+1}XP_{n-1} + \frac{n}{2n+1}(X^2-1)P_{n-1}'$

$0_{\mathbb{R}[X]} = -nP_n + \frac{n}{2n+1}[(X^2-1)P_{n-1}' + (n+2)XP_{n-1}]$, donc en divisant par n : $-P_n + \frac{1}{2n+1}[(X^2-1)P_{n-1}' + (n+2)XP_{n-1}] = 0_{\mathbb{R}[X]}$

Faisons apparaître Q_{n-1}.

$0_{\mathbb{R}[X]} = -P_n + \frac{1}{2n+1}\left[(X^2-1)P'_{n-1} - (n-1)XP_{n-1} + (2n+1)XP_{n-1}\right] = -P_n + \frac{1}{2n+1} Q_{n-1} + XP_{n-1}$. Or nous savons que :

$Q_{n-1} = -\frac{(n-1)(n-1+2)}{2(n-1)+1} P_{n-1-1} = -\frac{n^2-1}{2n-1} P_{n-2}$.

Pour finir : $-P_n + \frac{1}{2n+1}\left(-\frac{n^2-1}{2n-1} P_{n-2}\right) + XP_{n-1} = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ce qui par multiplication par -1 donne :

$$P_n - XP_{n-1} + \frac{n^2-1}{4n^2-1} P_{n-2} = 0_{\mathbb{R}[X]}. \qquad (3)$$

II ETUDE DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SUITE $P_n(x)$

Q1. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2k+1-2k+1}{4k^2-1}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{4k^2-1} = \frac{1}{4k^2-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$. $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2(2n+1)}$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1/6$.

Ceci montre que la série de terme général $\frac{1}{4k^2-1}$ est convergente et que $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{6}$.

Q2. a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant 1$.

$u_1 = 1 + \frac{1}{9} \geqslant 1 = u_0 \geqslant 1$! La propriété est donc vraie pour $n = 1$.

Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $n+1$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{9}\left[u_n - u_{n-1} + \frac{3}{4(n+1)^2-1} u_{n-1}\right] \underset{\substack{\uparrow \\ u_n - u_{n-1} \geqslant 0 \text{ et } u_{n-1} \geqslant 0}}{\geqslant} 0$$

Donc $u_{n+1} \geqslant u_n$. Comme $u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant 1$: $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant 1$. Ce qui achève la récurrence.

b) $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2 \Rightarrow u_k - u_{k-1} = \frac{1}{9}\left[u_{k-1} - u_{k-2} + \frac{3}{4k^2-1} u_{k-2}\right]$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=2}^{n} (u_k - u_{k-1}) = \frac{1}{9}\left[\sum_{k=2}^{n}(u_{k-1} - u_{k-2}) + \sum_{k=2}^{n} \frac{3}{4k^2-1} u_{k-2}\right]$$

Donc $u_n - u_1 = \frac{1}{9}\left[(u_{n-1} - u_0) + \sum_{k=2}^{n} \frac{3}{4k^2-1} u_{k-2}\right]$

Soit encore $u_n = u_1 + \frac{1}{9}\left[(u_{n-1} - u_0) + \sum_{k=2}^{n} \frac{3}{4k^2-1} u_{k-2}\right]$.

c) On a montré que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

Par conséquent, si $n \in \mathbb{N}$ et si $n \geqslant 2$, $u_n \underset{\substack{\uparrow \\ u_{n-1} \leqslant u_n \text{ et } u_{k-2} \leqslant u_n}}{\leqslant} u_1 + \frac{1}{9}\left[(u_n - u_0) + \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{3}{4k^2-1}\right) u_n\right]$

Donc pour $n\geq 2$: $u_n \leq \underbrace{1+\frac{1}{9}}_{u_1}+\frac{1}{9}u_n-\underbrace{\frac{1}{9}}_{u_0}+\frac{1}{3}\Big(\underbrace{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{4k^2-1}}_{S_n}\Big)u_n \leq 1+\frac{1}{9}u_n+\frac{1}{18}u_n=1+\frac{1}{6}u_n$

$S_n\leq\frac{1}{6}$ car $(S_n)_{n\geq 2}$ est croissante et converge vers 1/6

Finalement $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $u_n-\frac{1}{6}u_n\leq 1$

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $\frac{5}{6}u_n\leq 1$.

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $u_n\leq\frac{6}{5}$, $u_0=1\leq\frac{6}{5}$ et $u_1=1+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}\leq\frac{6}{5}$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq\frac{6}{5}$.

c) La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par 6/5, elle converge. Soit L sa limite.

Notons que : $L\leq\frac{6}{5}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$. $u_n=u_1+\frac{1}{9}\Big[(u_{n-1}-u_0)+\sum_{k=2}^{n}\frac{3}{4k^2-1}u_{k-2}\Big]\geq u_1+\frac{1}{9}\Big[(u_{n-1}-u_0)+\sum_{k=2}^{n}\frac{3}{4k^2-1}\Big]$ ($u_{k-2}\geq 1$ (a))

Donc pour $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$: $u_n\geq u_1+\frac{1}{9}\big[(u_{n-1}-u_0)+3S_n\big]$

Par passage à la limite on obtient : $L\geq u_1+\frac{1}{9}L-\frac{1}{9}u_0+\frac{1}{9}\times 3\times\frac{1}{6}$.

Donc $L-\frac{1}{9}L\geq 1+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{19}{18}$

$\frac{8}{9}L\geq\frac{19}{18}$; $L\geq\frac{19}{16}$

Donc $\frac{19}{16}\leq L\leq\frac{6}{5}$. Notons que $\frac{6}{5}-\frac{19}{16}=0{,}0125>0{,}01$! Prenons le milieu !

$\left|L-\dfrac{\frac{6}{5}+\frac{19}{16}}{2}\right|\leq\frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}-\frac{19}{16}\right)=0{,}00625$

$\frac{191}{160}$ est une valeur approchée à $0{,}01$ près de L. $\frac{191}{160}=1{,}19375$

Ou encore : $\frac{19}{16}\leq L\leq\frac{6}{5}$ donne : $1{,}1875\leq L\leq 1{,}2$. Par conséquent : $-0{,}0025\leq L-1{,}19\leq 0{,}01$

$|L-1{,}19|\leq 0{,}01$. $1{,}19$ est encore une valeur approchée à 10^{-2} près de L.

(Q3) a) Posons $\forall t\in\,]0,+\infty[$, $\psi(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$ (... = ch t ...cosinus hyperbolique)

ψ est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall t\in\,]0,+\infty[$, $\psi'(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}>0$.

ψ est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, $\lim_{t\to 0}\psi(t)=1$ et $\lim_{t\to+\infty}\psi(t)=+\infty$.

ψ définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]1,+\infty[$.

$\forall x\in\,]1,+\infty[$, $\exists!\,t\in\,]0,+\infty[$, $\psi(t)=x$.

$\forall x\in\,]1,+\infty[$, $\exists!\,t\in\,]0,+\infty[$, $x=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$ (t = Arg ch x ... "inverse" du cosinus hyperbolique)

Donnons une seconde démonstration de ce résultat. Soit $x\in\,]1,+\infty[$.

Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$. $x=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\iff 2xe^t=(e^t)^2+1\iff(e^t)^2-2xe^t+1=0\iff e^t=x\pm\sqrt{x^2-1}$

$x=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\iff t=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$ ou $t=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ ($x>\sqrt{x^2-1}$ et $x+\sqrt{x^2-1}>0$)

Notons que : $x+\sqrt{x^2-1}>1$ et $x-\sqrt{x^2-1}<1$ à démontrer.

Donc $\ln(x+\sqrt{x^2-1})>0$ et $\ln(x-\sqrt{x^2-1})<0$.

Finalement $t=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ est l'unique élément de $\mathbb{R}_+^*$ tel que : $x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ ... sachant que x est dans $]1,+\infty[$.

b) Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$. $u_0(t)=P_0\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\underset{P_0=1}{=}1$, $u_1(t)=\dfrac{2}{e^t}P_1\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\underset{P_1=X}{=}\dfrac{2}{e^t}\,\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}=1+e^{-2t}$

$u_0(t)=1$ et $u_1(t)=1+e^{-2t}$

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant 2$. $P_n\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)-\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}P_{n-1}\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)+\dfrac{n^2-1}{4n^2-1}P_{n-2}\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)=0$ (3).

Donc : $\dfrac{e^{nt}}{2^n}u_n(t)-\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\times\dfrac{e^{(n-1)t}}{2^{n-1}}u_{n-1}(t)+\dfrac{n^2-1}{4n^2-1}\times\dfrac{e^{(n-2)t}}{2^{n-2}}u_{n-2}(t)=0$.

En multipliant par $\dfrac{2^n}{e^{nt}}$ on obtient :

$u_n(t)-(e^t+e^{-t})e^{-t}u_{n-1}(t)+\dfrac{4(n^2-1)}{4n^2-1}e^{-2t}u_{n-2}(t)=0$; donc

$u_n(t)-u_{n-1}(t)-e^{-2t}u_{n-1}(t)+e^{-2t}u_{n-2}(t)-\dfrac{3}{4n^2-1}e^{-2t}u_{n-2}(t)=0$; soit encore :

$u_n(t)-u_{n-1}(t)=e^{-2t}\left[(u_{n-1}(t)-u_{n-2}(t))+\dfrac{3}{4n^2-1}u_{n-2}(t)\right]$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $n\in[\![2,+\infty[\![$

c) Notons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n et u_n-u_{n-1} sont strictement positives et décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$

→ C'est clair pour $n=1$ car $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $u_0(t)=1$ et $(u_1-u_0)(t)=e^{-2t}$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$

H.R. u_{n-1} et u_n-u_{n-1} sont strictement positives et décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$.

Notons que : u_n et $u_{n+1}-u_n$

$u_n=u_{n-1}+(u_n-u_{n-1})$ donc u_n est strictement positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ ... comme somme...

$\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $(u_{n+1}-u_n)(t)=e^{-2t}\varphi_n(t)$ où $\varphi_n=u_n-u_{n-1}+\dfrac{3}{4(n+1)^2-1}u_{n-1}$

u_n-u_{n-1} et $\dfrac{3}{4(n+1)^2-1}u_{n-1}$ sont strictement positives et décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$; il en est de même pour φ_n. $u_{n+1}-u_n$ est donc le produit de deux fonctions strictement positives et décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ (φ_n et $t\mapsto e^{-2t}$). donc $u_{n+1}-u_n$ est strictement positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ceci achève la récurrence.

d) $x=\dfrac{5}{3}$ donc $t=\ln\left(\dfrac{5}{3}+\sqrt{\left(\dfrac{5}{3}\right)^2-1}\right)=\ln\left(\dfrac{5}{3}+\dfrac{4}{3}\right)=\ln 3$. Pour $t=\ln 3$. $e^{-2t}=e^{-2\ln 3}=\dfrac{1}{9}$

$u_0(t)=1$ et $u_1(t)=1+e^{-2t}=1+\dfrac{1}{9}$.

Donc $\begin{cases}u_0(t)=1,\ u_1(t)=1+1/9 \text{ et}\\ \forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ u_n(t)=u_{n-1}(t)+\dfrac{1}{9}\left[(u_{n-1}(t)-u_{n-2}(t))+\dfrac{3}{4n^2-1}u_{n-2}(t)\right]\end{cases}$

$$u \left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1,\ u_1 = 1 + \frac{1}{9} \text{ et} \\ \forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{9}\left[(u_{n-1} - u_{n-2}) + \frac{3}{4n^2-1} u_{n-2} \right] \end{array} \right.$$

Une simple récurrence d'ordre 2 donne alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(t) = u_n$.

On suppose $x \geqslant \frac{5}{3}$. Soit t l'unique élément de $\mathbb{R}_+^*$ tel que : $\frac{e^t + e^{-t}}{2} = x$

$t \mapsto \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$; par conséquent $x \geqslant \frac{5}{3}$ donne nécessairement $t \geqslant \ln 3$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 1$. $(u_n - u_{n-1})(t) = u_n(t) - u_{n-1}(t) > 0$ (d'après c)) donc la suite $(u_n(t))_{n \geqslant 0}$ est croissante.

u_{n-1} étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $u_{n-1}(t) \leqslant u_{n-1}(\ln 3) = u_{n-1} \leqslant 6/5$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Donc la suite $(u_n(t))_{n \geqslant 0}$ est croissante et majorée par $6/5$; elle converge.

Posons $L(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(t)$. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(t) \geqslant u_0(t) = 1$; à la limite $L(x) \geqslant 1$ donc

$L(x) > 0$. Ceci permet de dire que $u_n(t) \underset{+\infty}{\sim} L(x)$

$$e^t = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

Donc $P_n(x) = P_n\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) = \frac{e^{nt}}{2^n} u_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(e^t)^n}{2^n} L(x) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{2}\right)^n L(x)$

Donc pour $x \geqslant \frac{5}{3}$: $\underline{\underline{P_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{2}\right)^n L(x).}}$