PARTIE I C'est tellement classique que c'est presque une question de cours.

Q1 a) $f(0)=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt=[\text{Arctan}\,t]_0^1=\frac{\pi}{4}$. $\underline{f(0)=\frac{\pi}{4}}$.

b) Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$.

$\forall t\in[0,1]$, $x\leq(1+t^2)x\leq 2x$ ($\forall t\in[0,1]$, $1\leq 1+t^2\leq 2$ et $x\geq 0$)

$\forall t\in[0,1]$, $e^{-2x}\leq e^{-(1+t^2)x}\leq e^{-x}$ ($u\mapsto e^{-u}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$).

$\forall t\in[0,1]$, $e^{-2x}\times\frac{1}{1+t^2}\leq\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\leq e^{-x}\times\frac{1}{1+t^2}$.

En intégrant entre 0 et 1 on obtient : $e^{-2x}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt\leq f(x)\leq e^{-x}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$.

Par conséquent : $\underline{\frac{\pi}{4}e^{-2x}\leq f(x)\leq\frac{\pi}{4}e^{-x}}$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+$.

c) Un raisonnement analogue partant de $\forall t\in[0,1]$, $x\geq(1+t^2)x\geq 2x$ donne :

$\underline{\frac{\pi}{4}e^{-x}\leq f(x)\leq\frac{\pi}{4}e^{-2x}}$ pour tout x dans $\mathbb{R}_-$.

d) $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\frac{\pi}{4}e^{-2x}\leq f(x)\leq\frac{\pi}{4}e^{-x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi}{4}e^{-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi}{4}e^{-x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

$\forall x\in\mathbb{R}_-$, $\frac{\pi}{4}e^{-x}\leq f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{\pi}{4}e^{-x})=+\infty$; donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

Q2 a) $a\in\mathbb{R}_+$. Posons $\forall h\in[-1,1]$, $\varphi(h)=e^{-ah}$.

φ est dérivable sur $[-1,1]$ et $\forall h\in[-1,1]$, $\varphi'(h)=-ae^{-ah}$; en particulier $\varphi'(0)=-a$. $\forall h\in[-1,1]$, $-ah\leq a$

φ' est dérivable sur $[-1,1]$ et $\forall h\in[-1,1]$, $\varphi''(h)=a^2e^{-ah}$, on a $\forall h\in[-1,1]$, $|\varphi''(h)|\leq a^2e^a$

donc $\forall h\in[-1,1]$, $|\varphi(h)-(\varphi(0)+h\varphi'(0))|\leq\frac{h^2}{2}a^2e^a$ (Inégalité de T.L. ...

... $|\varphi(h)-\varphi(0)-h\varphi'(0)|\leq\frac{h^2}{2}\max\limits_{h\in[-1,1]}|\varphi''(h)|$)

$\forall h\in[-1,1]$, $|e^{-ah}-1+ah|\leq\frac{a^2h^2}{2}e^a$.

b) Soit $x\in\mathbb{R}$. Soit $h\in[-1,1]$.

$$f(x+h)-f(x)+hg(x)=\int_0^1\frac{e^{-(1+t^2)(x+h)}}{1+t^2}dt-\int_0^1\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}dt+h\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}dt$$

$$=\int_0^1\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\left[e^{-(1+t^2)h}-1+h(1+t^2)\right]dt$$

$|f(x+h)-f(x)+hg(x)|\leq\int_0^1\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}|e^{-(1+t^2)h}-1+(1+t^2)h|dt\underset{\text{Q2 a) avec "}a=1+t^2\text{"}}{\leq}\int_0^1\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\times(1+t^2)^2\frac{h^2}{2}e^{(1+t^2)}dt$

$|f(x+h)-f(x)+hg(x)|\leq\frac{h^2}{2}\int_0^1(1+t^2)e^{(1+t^2)(1-x)}dt\leq\frac{h^2}{2}\int_0^1(1+t^2)e^{(1+t^2)|1-x|}dt\leq\frac{h^2}{2}e^{2|1-x|}\int_0^1(1+t^2)dt$

$(1+t^2)|1-x|\leq 2|1-x|$

$|f(x+h)-f(x)+hg(x)|\leq\frac{h^2}{2}e^{2|1-x|}\left[t+\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{h^2}{2}\times e^{2|1-x|}\times\frac{4}{3}$

$|f(x+h)-f(x)+hg(x)|\leq\frac{2}{3}h^2e^{2|1-x|}$

c) Soit $x\in\mathbb{R}$. $\forall h\in[-1,1]-\{0\}$, $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+g(x)\right| \leq \frac{2|h|}{3} e^{2(1+|x|)}$ d'après ce qui précède (division par $|h|$)

de plus $\lim\limits_{h\to 0} \frac{2|h|}{3}e^{2(1+|x|)}=0$; par conséquent : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+g(x)\right)=0$

On en déduit que : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-g(x)$. Ceci signifie que f est dérivable en x et $f'(x)=-g(x)$

Conclusion : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'=-g$.

Remarque.. f' s'obtient en dérivant par rapport à x la fonction que l'on intègre (... dérivation sous le signe somme ... qui n'est pas toujours licite)

Q3 a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $x\mapsto 2f(\frac{x^2}{2})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée : $x\mapsto 2x f'(\frac{x^2}{2})$

$x\mapsto \int_0^x e^{-u^2/2}du$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x\mapsto e^{-x^2/2}$ donc $x\mapsto \left(\int_0^x e^{-u^2/2}du\right)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x\mapsto 2e^{-x^2/2}\int_0^x e^{-u^2/2}du$.

φ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)=2x f'(\frac{x^2}{2})+2e^{-x^2/2}\int_0^x e^{-u^2/2}du$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)=2x\left(-\int_0^1 e^{-(1+t^2)\frac{x^2}{2}}dt\right)+2e^{-x^2/2}\int_0^x e^{-u^2/2}du = -2x\, e^{-x^2/2}\int_0^1 e^{-t^2x^2/2}dt+2e^{-x^2/2}\int_0^x e^{-u^2/2}du$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x) \underset{u=tx \text{ dans la 1ère intégrale}}{=} -2e^{-x^2/2}\int_0^x e^{-u^2/2}du+2e^{-x^2/2}\int_0^x e^{-u^2/2}du=0$. φ' est nulle sur $\mathbb{R}$.

φ est donc constante sur $\mathbb{R}$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\varphi(0)=2f(0)+0^2=2f(0)=2\,\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\frac{\pi}{2}$.

b) $\frac{\pi}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. En particulier $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\varphi(x)-2f(\frac{x^2}{2})\right)=\frac{\pi}{2}$; par conséquent :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{-u^2/2}du\right)^2=\frac{\pi}{2}$; en passant à la racine carrée, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\int_0^x e^{-u^2/2}du\right|=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\int_0^x e^{-u^2/2}du\geq 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-u^2/2}du=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. $\int_0^{+\infty}e^{-u^2/2}du=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

$u\mapsto e^{-u^2/2}$ est paire sur $\mathbb{R}$ donc $\int_{-\infty}^0 e^{-u^2/2}du$ converge et vaut $\int_0^{+\infty}e^{-u^2/2}du=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. (à détailler)

Donc $I=2\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2\pi}$. $\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}dt=\sqrt{2\pi}}$. Un rapide changement de variable donne encore $\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}}$.

PARTIE II

Q1 a) Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\int_0^x e^{-u^2/2}du \underset{\text{intégration par partie}}{=} \left[u e^{-u^2/2}\right]_0^x-\int_0^x u\left(-\frac{2u}{2}\right)e^{-u^2/2}du = x e^{-x^2/2}+\int_0^x u^2e^{-u^2/2}du$$

Or $\sqrt{2\pi}F(x)=\int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}du=\int_{-\infty}^0 e^{-u^2/2}du+\int_0^x e^{-u^2/2}du=\int_0^{+\infty}e^{-u^2/2}du+\int_0^x e^{-u^2/2}du=\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\int_0^x e^{-u^2/2}du$

Finalement $\sqrt{2\pi}\left(F(x)-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2\pi}F(x)-\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\int_0^x e^{-u^2/2}du=x e^{-x^2/2}+\int_0^x u^2e^{-u^2/2}du$ ... cqfd.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

→ Notons que la propriété est vraie pour $n=0$

Soit à montrer que : $\sqrt{2\pi}\,(F(x)-\frac{1}{2}) = x e^{-x^2/2}[1] + \frac{1}{1}\int_0^x u^2 e^{-u^2/2}du$ ... c'est ce que nous venons de faire.

→ Supposons la propriété vraie pour n et montrons-la pour $n+1$.

Il suffit en fait de montrer que : $\frac{x^{2n+2}}{1\times 3\times 5\times\cdots(2n+3)} \times x e^{-x^2/2} + R_{n+1}(x) = R_n(x)$!

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+3)}\int_0^x u^{2n+4}e^{-u^2/2}du = \frac{1}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+3)}\int_0^x \underbrace{(-u^{2n+3})}_{f}\underbrace{(-u e^{-u^2/2})}_{g'}du$$

intégration par parties

$$\stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+3)}\left(\left[-u^{2n+3}e^{-u^2/2}\right]_0^x - \int_0^x -(2n+3)u^{2n+2}e^{-u^2/2}du\right)$$

$$R_{n+1}(x) = -\frac{x^{2n+2}}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+3)}x e^{-x^2/2} + \underbrace{\frac{1}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}\int_0^x u^{2n+2}e^{-u^2/2}du}_{R_n(x)}$$

Donc $R_n(x) = \frac{x^{2n+2}}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+3)} x e^{-x^2/2} + R_{n+1}(x)$, c'est ce qu'il fallait montrer.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $0 \le \int_0^x u^{2n+2}e^{-u^2/2}du \le \int_0^x u^{2n+2}du = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$ car $\forall u \in \mathbb{R}_+,\ 0 \le u^{2n+2}e^{-u^2/2} \le u^{2n+2}$

Par conséquent : $0 \le R_n(x) \le \frac{1}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)} \times \frac{x^{2n+3}}{2n+3} = |x|\frac{(x^2)^{n+1}}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k+1)} = |x|\prod_{k=1}^{n+1}\frac{x^2}{2k+1}$

Donc : $|R_n(x)| \le |x|\prod_{k=1}^{n+1}\frac{x^2}{2k+1}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_-$. $R_n(x) = -R_n(-x)$ ($u \mapsto u^{2n+2}e^{-u^2/2}du$ est paire sur $\mathbb{R}$ ... "$\int_0^x = \int_{-x}^0$")

$|R_n(x)| = |R_n(-x)| \le |-x|\prod_{k=1}^{n+1}\frac{(-x)^2}{2k+1} = |x|\prod_{k=1}^{n+1}\frac{x^2}{2k+1}$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|R_n(x)| \le |x|\prod_{k=1}^{n+1}\frac{x^2}{2k+1} = |x|\frac{x^2}{3}\times\frac{x^2}{5}\times\frac{x^2}{7}\times\cdots\times\frac{x^2}{2n+3}$

$\forall x \in [-2,2]$, $|R_n(x)| \le \frac{2^{2n+3}}{1\times 3\times 5\times 7\times\cdots\times(2n+3)} = \frac{2^{2n+3}}{(2n+3)!}2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n+2) = \frac{2^{2n+3}\times 2^{n+1}\times(n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{2^{3n+4}(n+1)!}{(2n+3)!}$

La machine donne $|R_n(x)| \le 10^{-6}$ pour $n=12$. En fait $|R_n(x)| \le 10^{-6}$ dès que $n \ge 12$.

Q3 a) $S = 1 + \frac{x^2}{1\times 3} + \frac{x^4}{1\times 3\times 5} + \cdots + \frac{x^{2n}}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}$! Surpris ?

b) La machine donne (avec un programme sans malice →)

```
Lbl 0
?→X: 1→S: 12→K
Lbl 1
SX²÷(2K+1)+1→S
K-1→K
K>0 ⇒ Goto 1
SX×e(-X²÷2)÷√(2π)+.5 ◢
Goto 0
```

$F(0{,}5) \simeq 0{,}691\ 462\ 461$ $F(1{,}5) \simeq 0{,}841\ 344\ 746$

$F(0{,}78) \simeq 0{,}783\ 186\ 444$ $F(2) \simeq 0{,}977\ 249\ 829$

$F(0{,}784) \simeq 0{,}783\ 479\ 945$

$F(1) \simeq 0{,}841\ 344\ 746$

Notons que, théoriquement, la valeur absolue de l'erreur est majorée par $10^{-6}/\sqrt{2\pi} \le 0{,}399\times 10^{-6}$

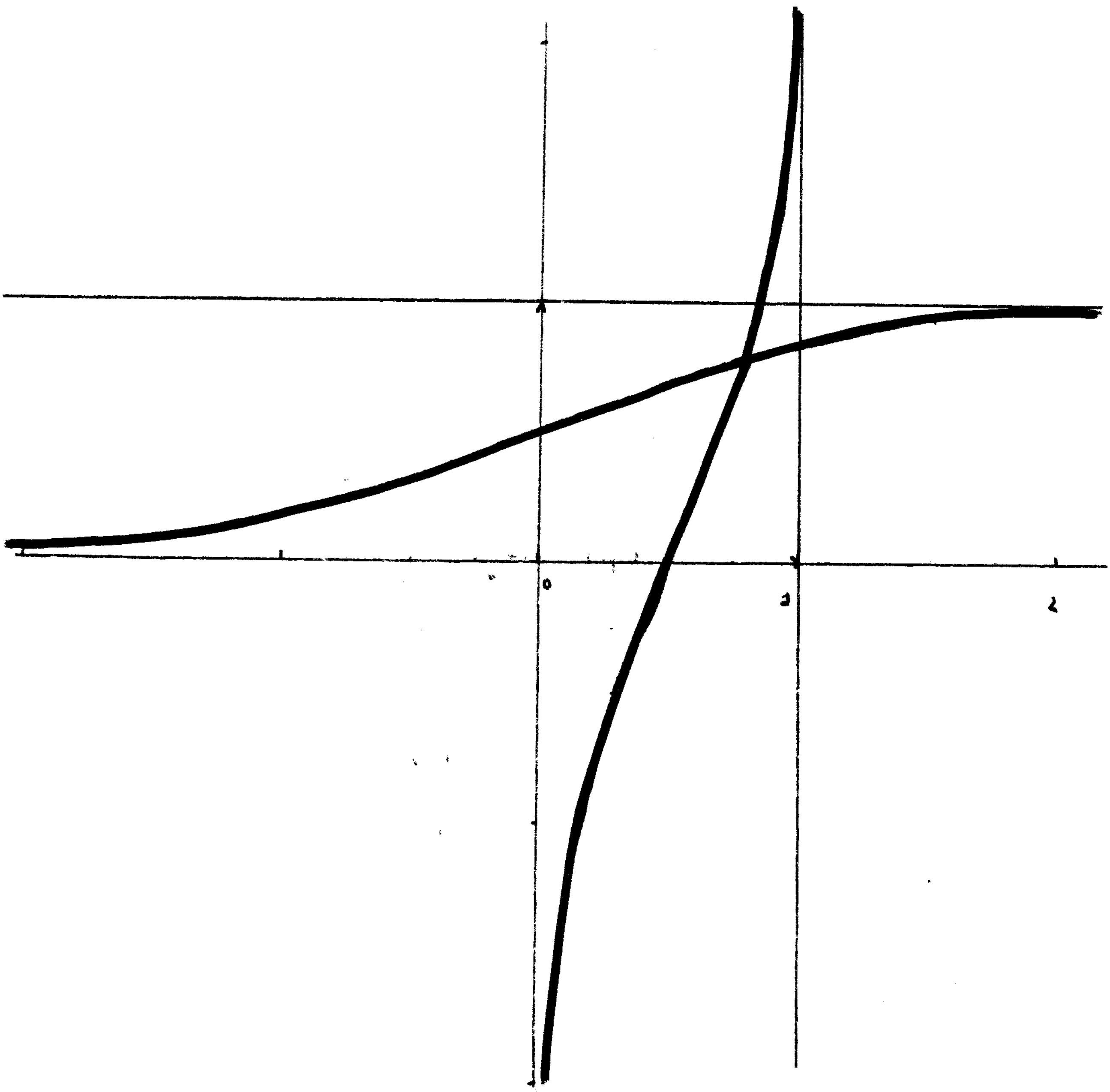
PARTIE III

Q1 F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par exemple : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-u^2/2}du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{-u^2/2}du$)
et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} > 0$.

F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; par conséquent F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $F(\mathbb{R})$. $F(\mathbb{R}) =]0,1[$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

$G = F^{-1}$ est une bijection continue strictement croissante de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$.

Q2



Q3 a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-u^2/2} du \underset{v=-u}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-v^2/2} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2/2} dv - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-v^2/2} dv = 1 - F(x)$.

$\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ F(-x) = 1 - F(x).}$ (le point de coord. $(0, \frac{1}{2})$ est centre de symétrie de la courbe représentative de F)

Soit $y \in]0,1[$. Posons $x = G(y)$. $F(x) = y$ donc $1 - y = 1 - F(x) = F(-x)$

Par conséquent $G(1-y) = G(F(-x)) = -x = -G(y)$.

$\forall y \in]0,1[$, $G(1-y) = -G(y)$. (le point de coord. $(\frac{1}{2}, 0)$ est centre de symétrie de la courbe représentative de G).

b) Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$. $\sqrt{2\pi} F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$.

$\forall u \in]-\infty, x]$, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{u}$

$\forall u \in]-\infty, x]$, $\frac{u e^{-u^2/2}}{x} \geq u e^{-u^2/2} \frac{1}{u} = e^{-u^2/2}$

Par conséquent : $\forall u \in]-\infty, x]$, $e^{-u^2/2} \leq \frac{1}{x} u e^{-u^2/2}$

$\forall A \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{x} \int_A^x u e^{-u^2/2} du = \frac{1}{x} \left[-e^{-u^2/2} \right]_A^x = \frac{1}{x} (-e^{-x^2/2} + e^{-A^2/2})$. De plus $\lim_{A \to -\infty} \frac{1}{x}(-e^{-x^2/2} + e^{-A^2/2}) = -\frac{e^{-x^2/2}}{x}$

Par conséquent $\frac{1}{x} \int_{-\infty}^{x} u e^{-u^2/2} du$ existe et vaut $-\frac{e^{-x^2/2}}{x}$.

Nous pouvons maintenant utiliser la dernière inégalité et dire que $\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du \leq \frac{1}{x} \int_{-\infty}^{x} u e^{-u^2/2} du$

soit encore $\sqrt{2\pi} F(x) \leq -\frac{e^{-x^2/2}}{x}$; ou : $F(x) \leq -\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}$.

Ceci donne la première inégalité demandée. Établissons la seconde

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{u} u e^{-u^2/2} du \underset{\substack{\text{par parties...} \\ \text{licite car } \lim_{u \to -\infty} \left[\frac{1}{u}(-e^{-u^2/2})\right] = 0}}{=} \left[\frac{1}{u}(-e^{-u^2/2}) \right]_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} \left(-\frac{1}{u^2}\right)(-e^{-u^2/2}) du = -\frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-u^2/2}}{u^2} du.$$

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-u^2/2}}{u^2} du = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{u^3} u e^{-u^2/2} du \underset{\text{licite car } \int_{-\infty}^{x} u e^{-u^2/2} du \text{ converge.}}{\leq} \frac{1}{x^3} \int_{-\infty}^{x} u e^{-u^2/2} du = \frac{1}{x^3} \left[-e^{-x^2/2} \right]$$

Finalement $\sqrt{2\pi} F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du = -\frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-u^2/2}}{u^2} du \geq -\frac{e^{-x^2/2}}{x} + \frac{1}{x^3} e^{-x^2/2} = \frac{1}{x} e^{-x^2/2} \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)$

donc $F(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2} \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) = -\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $\underline{\underline{-\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leq F(x) \leq -\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}}}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $1 - \frac{1}{x^2} \leq \frac{F(x)}{-\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}} \leq 1$. $\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$ donc $\lim_{x \to -\infty} \frac{F(x)}{-\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}} = 1$

Ceci donne : $F(x) \underset{-\infty}{\sim} -\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $1-F(x)=F(-x)$ et $F(-x)\underset{+\infty}{\sim} -\frac{e^{-x^2/2}}{-x\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}$

Par conséquent : $1-F(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}$

c) Soit $y\in]0,\frac{1}{2}[$. Posons $x=G(y)$; $x<0$.

L'encadrement du b) donne : $-\frac{e^{-(G(y))^2/2}}{G(y)\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{1}{(G(y))^2}\right)\leq y\leq -\frac{e^{-(G(y))^2/2}}{G(y)\sqrt{2\pi}}$

* Supposons un instant $1-\frac{1}{(G(y))^2}>0$; la croissance de la fonction ln donne :

$$-\frac{(G(y))^2}{2}+\ln\left(-\frac{1}{G(y)}\right)+\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\ln\left(1-\frac{1}{(G(y))^2}\right)\leq \ln y\leq -\frac{(G(y))^2}{2}+\ln\left(-\frac{1}{G(y)}\right)+\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Notons que : $\ln\left(-\frac{1}{G(y)}\right)=\ln\frac{1}{|G(y)|}=-\ln|G(y)|$ et $\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=-\ln\sqrt{2\pi}=-\frac{1}{2}\ln 2\pi$

Par conséquent : $-\frac{G^2(y)}{2}-\ln|G(y)|-\frac{1}{2}\ln 2\pi+\ln\left(1-\frac{1}{G^2(y)}\right)\leq\ln y\leq-\frac{G^2(y)}{2}-\ln|G(y)|-\frac{1}{2}\ln 2\pi.$

En multipliant par $-\frac{2}{G^2(y)}$ on obtient :

$$1+\frac{2}{G^2(y)}\ln|G(y)|+\frac{\ln 2\pi}{G^2(y)}-\frac{2}{G^2(y)}\ln\left(1-\frac{1}{G^2(y)}\right)\geq -\frac{2\ln y}{G^2(y)}\geq 1+2\frac{\ln|G(y)|}{G^2(y)}+\frac{\ln 2\pi}{G^2(y)}$$

$\lim_{y\to 0}G(y)=-\infty$ donc : $\lim_{y\to 0}\frac{2\ln|G(y)|}{G^2(y)}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{2}{|G(y)|}\times\frac{\ln|G(y)|}{|G(y)|}\right)=0$, $\lim_{y\to 0}\frac{2\pi}{G^2(y)}=0$,

$\lim_{y\to 0}\frac{2}{G^2(y)}\ln\left(1-\frac{1}{G^2(y)}\right)=0$.

Par conséquent $y\mapsto -\frac{2\ln y}{G^2(y)}$ est encadrée par deux fonctions ayant pour limite 1 en 0.

Donc $\lim_{y\to 0}-\frac{2\ln y}{G^2(y)}=1$; $\lim_{y\to 0}\sqrt{\frac{-2\ln y}{G^2(y)}}=1$; $\frac{\sqrt{-2\ln y}}{|G(y)|}\underset{0}{\sim}1$; $|G(y)|\underset{0}{\sim}\sqrt{2|\ln y|}$

$\forall y\in]0,\frac{1}{2}[$, $G(y)<0$ par conséquent : $-G(y)\underset{0}{\sim}\sqrt{2|\ln y|}$; $G(y)\underset{0}{\sim}-\sqrt{2|\ln y|}$

$\forall y\in]0,1[$, $G(y)=-G(1-y)$ et $\lim_{y\to 1}(1-y)=0$

Par conséquent : $G(y)\underset{1}{\sim}-\left[-\sqrt{2|\ln(1-y)|}\right]$; $G(y)\underset{1}{\sim}\sqrt{2|\ln(1-y)|}$

* Revenons sur l'hypothèse $1-\dfrac{1}{(G(y))^2}>0$.

$$1-\frac{1}{(G(y))^2}>0 \iff G^2(y)>1 \iff G(y)>1 \text{ ou } G(y)<-1 \overset{x=G(y)<0}{\iff} G(y)<-1 \iff y<G^{-1}(-1)=F(-1)$$

Par conséquent l'inégalité proposée ne vaut que pour $y<F(-1)$ (... et pas pour $y<\frac{1}{2}=F(0)$)

Ceci est largement suffisant pour le passage à la limite que nous avons fait

PARTIE IV

Q1 a) $n\in\mathbb{N}^*$. X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p. Posons $q=1-p$.

$X_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $p(X_n=k)=C_n^k\, p^k q^{n-k}$.

$\underline{\underline{E(X_n)=np}}$ et $\underline{\underline{V(X_n)=npq}}$. $E(Y_n)=E\left(\dfrac{X_n}{n}\right)=\dfrac{1}{n}E(X_n)$; $V(Y_n)=\dfrac{1}{n^2}V(X_n)$ donc :

$\underline{\underline{E(Y_n)=p}}$ et $\underline{\underline{V(Y_n)=\dfrac{pq}{n}}}$

b) $n\in\mathbb{N}^*$. $V(X_n)\leqslant\dfrac{n}{4}\iff pq\leqslant\dfrac{1}{4}\iff p(1-p)\leqslant\dfrac{1}{4}\iff p^2-p+\dfrac{1}{4}\geqslant 0\iff\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$.

donc $\underline{\underline{V(X_n)\leqslant\dfrac{n}{4}}}$.

Q2 Première majoration de u_n.

$n\in\mathbb{N}^*$. $$u_n=p(|Y_n-p|>0{,}01)=p(|Y_n-E(Y_n)|>0{,}01)\overset{\text{Tchebychev :}}{\leqslant}\frac{V(Y_n)}{(0{,}01)^2}=\frac{\frac{1}{n^2}V(X_n)}{0{,}0001}\leqslant 10^4\frac{1}{n^2}\frac{n}{4}=\frac{2500}{n}$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\leqslant r_n$ avec $r_n=\dfrac{2500}{n}$.

Pour avoir $r_n\leqslant\varepsilon$ il suffit de prendre $n\geqslant\dfrac{2500}{\varepsilon}$

Soit encore : $n\geqslant 25000$ pour $\varepsilon=0{,}1$ et $n\geqslant 50\,000$ pour $\varepsilon=0{,}05$

Q3 Seconde majoration de u_n ?!! Tu rigoles toto

Nous n'allons pas majorer u_n mais une valeur approchée de u_n ! Ne connaissant pas le sens de l'approximation un critère sans second majorant !

a) p n'est pas trop petit ($p\simeq\frac{1}{2}$), $n\geqslant 20$, $np\geqslant 10$ et $nq\geqslant 10$. Nous pouvons donc approcher la loi binomiale X_n de paramètres np et $np(1-p)$ par une loi normale de paramètres np et $\sqrt{np(1-p)}$.

Ceci revient à approcher $X_n^*=\dfrac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ par une loi normale de paramètres 0 et 1 !

$$u_n=p(|Y_n-p|>0{,}01)=p\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>0{,}01\right)=p(|X_n-np|>0{,}01n)=p\left(|X_n^*|>\frac{0{,}01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$u_n=1-p\left(|X_n^*|\leqslant\frac{0{,}01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Posons $u'_n = 1 - p\left(|X| \le \frac{0,01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. $u_n \simeq u'_n$.

$$u'_n = 1 - \left[2F\left(\frac{0,01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1\right] = 2\left(1 - F\left(\frac{0,01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\right)$$

$u_n \simeq u'_n$ avec $u'_n = 2\left(1 - F\left(\frac{0,01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\right)$.

Nous avons vu que : $np(1-p) = V(X_n) \le \frac{n}{4}$; par conséquent : $\frac{0,01n}{\sqrt{np(1-p)}} \geq \frac{0,01n}{\sqrt{\frac{n}{4}}} = 0,02\sqrt{n}$

F étant décroissante : $F\left(\frac{0,01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \geq F(0,02\sqrt{n})$.

Donc $u'_n \le m_n$ avec $m_n = 2(1 - F(0,02\sqrt{n}))$. m_n est un majorant de u'_n "ne dépendant que de n"... et un peu de F !

G croissante sur $]0,1[$ et $1-\frac{\varepsilon}{2} \in]$

b) $m_n \le \varepsilon \iff 2(1-F(0,02\sqrt{n})) \le \varepsilon \iff F(0,02\sqrt{n}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \iff 0,02\sqrt{n} \geq G(1-\frac{\varepsilon}{2})$

$m_n \le \varepsilon \iff 0,02\sqrt{n} \geq -G(\frac{\varepsilon}{2}) \iff (0,02)^2 n \geq G^2(\varepsilon/2) \iff n \geq 2500\, G^2(\frac{\varepsilon}{2})$.

$G(\varepsilon/2) < 0$ car $\frac{\varepsilon}{2} \in]0, \frac{1}{2}[$

Par conséquent : $m_n \le \varepsilon \iff n \geq 2500\, G^2(\frac{\varepsilon}{2})$ $= 2500\, G^2(1-\frac{\varepsilon}{2})$

"Examiner les cas $\varepsilon = 0,10$ et $\varepsilon = 0,05$". Il n'y a rien à examiner dans la mesure où on ne fournit pas le seul des approximations $F(1,96) \simeq 0,975$ et $F(1,64) \simeq 0,950$ (on aurait pu au moins les donner dans l'aide !)

Le pire est que, par exemple : $F(1,64) < 0,950$ donc $1,64 \le G(0,950) = G(1 - \frac{0,10}{2})$

Donc $n \geq 2500 \times (1,64)^2$ ne donne pas nécessairement $m_n \le 0,10$. Bravo les petits gars !

En fait : $F(1,65) \simeq 0,950$ et $F(1,65) > 0,950$; $1,65 > G(0,950) = G(1 - \frac{0,10}{2})$;

donc dès que : $n \geq 2500 \times 1,65^2$: $m_n \le 0,10$. $m_n \le 0,10$ dès que : $n \geq 6807$

$F(1,96) \simeq 0,975002105$ (...Simpson). $F(1,96) \simeq 0,975$ et $F(1,96) \geq 0,975$

$1,96 \geq G(0,975)$. $m_n \le 0,05$ dès que $n \geq 2500 \times 1,96^2$ c'est à dire dès que : $n \geq 9604$

c) $n(\varepsilon) = E\left[2500\, G^2(1-\frac{\varepsilon}{2})\right] + 1$ $\quad (m_n \le \varepsilon \iff n \geq 2500\, G^2(1-\frac{\varepsilon}{2}))$

$\forall x \in [0,+\infty[$, $E(x) \le x < E(x)+1$; $\forall x \in [0,+\infty[$, $\frac{E(x)}{E(x)+1} \le \frac{x}{E(x)+1} < 1$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $1 - \frac{1}{E(x)+1} \le \frac{x}{E(x)+1} < 1$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{E(x)+1} = 1$ $\quad (\lim\limits_{x\to+\infty}(E(x)+1) = +\infty)$.

Par conséquent $E(x)+1 \underset{+\infty}{\sim} x$. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(1-\frac{\varepsilon}{2}) = 1$ et $\lim\limits_{y\to 1^-} G^2(y) = +\infty$

Donc $n(\varepsilon) \underset{0}{\sim} 2500\, G^2(1-\frac{\varepsilon}{2}) \underset{0}{\sim} 2500 \cdot 2|\ln(\varepsilon/2)| = 5000|\ln(\varepsilon/2)| = 5000 \ln\frac{2}{\varepsilon}$. $n(\varepsilon) \underset{0}{\sim} 5000 \ln\frac{2}{\varepsilon}$

$G(y) \underset{1}{\sim} \sqrt{2|\ln(1-y)|}$ $\qquad \varepsilon/2 < 1$