PARTIE I

(Q2) ! Commençons par calculer J. $J = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx = 4\,\mathrm{Arctan}\,1 = \pi$. $\underline{J = \pi}$.

(Q1) Un premier programme conforme à la question.

```
(* Méthode des rectangles LYON 90 *)

program lyon90;

uses crt;

var n,i:integer;

function f(ixe:real):real;

begin
f:=4/(1+ixe*ixe);
end;

function rectangle(BorneInf,BorneSup:real;haine:integer):real;

var k:integer;r,pas:real;

begin
pas:=(BorneSup-BorneInf)/haine;
r:=f(BorneInf);
for k:=1 to haine-1 do
r:=r+f(BorneInf+k*pas);
rectangle:=r*pas;
end;

begin
clrscr;
write('Donnez la valeur de n. n=');readln(n);
writeln;writeln('u(',n,')=',rectangle(0,1,n));
end.
```

```
Donnez la valeur de n. n=16

u(16)= 3.2034416120E+00
```

Un second programme qui calcule les trois suites.

```
(* Méthode des rectangles LYON 90 *)

program lyon90;

uses crt;
const DimMax=2048;
type tableau=array[1..3,1..DimMax] of real;

var n,i:integer;a,b:real;tab:tableau;

function f(ixe:real):real;

begin
f:=4/(1+ixe*ixe);
end;
```

```
function rectangle(BorneInf,BorneSup:real;haine:integer):real;

var k:integer;r,pas:real;

begin

pas:=(BorneSup-BorneInf)/haine;r:=f(BorneInf);
for k:=1 to haine-1 do r:=r+f(BorneInf+k*pas);
rectangle:=r*pas;

end;
```

```
procedure TroisSuites(BorneInf,BorneSup:real;pe:integer;var T:tableau);

var k,puis:integer;

begin
puis:=1;
    for k:=0 to pe+2 do
    begin
    t[1,k]:=rectangle(BorneInf,BorneSup,puis);puis:=puis+puis;
    end;

for k:=0 to pe+1 do t[2,k]:=2*t[1,k+1]-t[1,k];
for k:=0 to pe do t[3,k]:=(4*t[2,k+1]-t[2,k])/3;
end;
```

```
begin
clrscr;
writeln('Je vous propose de calculer le terme de la suite w d''indice 2 puissanc
writeln;write('Donnez p. p=');readln(p);
write('Donnez la borne inférieure de l''intervalle d''intégration. a=');
readln(a);
write('Donnez la borne supérieure de l''intervalle d''intégration. b=');
readln(b);writeln;

TroisSuites(a,b,p,tab);
puissance:=1;
for i:=0 to p do
    begin
    write('u(',puissance:2,')=',tab[1,i]);
    write('  v(',puissance:2,')=',tab[2,i]);
    writeln('  w(',puissance:2,')=',tab[3,i]);
    puissance:=puissance+puissance;
    end;

writeln('u(',puissance:2,')=',tab[1,p+1],'  v(',puissance:2,')=',tab[2,p+1]);
puissance:=puissance+puissance; writeln('u(',puissance,')=',tab[1,p+2]);


end.
```

```
Je vous propose de calculer le terme de la suite w d'indice 2 puissance p

Donnez p. p=2
Donnez la borne inférieure de l'intervalle d'intégration. a=0
Donnez la borne supérieure de l'intervalle d'intégration. b=1

u( 1)= 4.0000000000E+00  v( 1)= 3.2000000000E+00  w( 1)= 3.1498039216E+00
u( 2)= 3.6000000000E+00  v( 2)= 3.1623529412E+00  w( 2)= 3.1416163774E+00
u( 4)= 3.3811764706E+00  v( 4)= 3.1468005184E+00  w( 4)= 3.1415928000E+00
u( 8)= 3.2639884945E+00  v( 8)= 3.1428947296E+00
u(16)= 3.2034416120E+00
```

PARTIE II

(Q1) a) Soit $y \in \mathbb{C}$.

$$y^{2n}-1=0 \Leftrightarrow y^{2n}=1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,2n-1]\!],\ y=e^{ik\frac{2\pi}{2n}}=e^{ik\frac{\pi}{n}}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $y\in\mathbb{C}$ et $y^{2n}-1=0$ est $S=\{e^{ik\frac{\pi}{n}} ; k\in[\![0,2n-1]\!]\}$

Remarque.. Posons pour tout $k\in[\![0,2n-1]\!]$, $z_k=e^{ik\frac{\pi}{n}}$.

Remarquons que :

→ $z_0=1$, $z_n=-1$

→ $\forall k\in[\![0,2n-1]\!]$, $\overline{z_k}=e^{-ik\frac{\pi}{n}}=e^{-ik\frac{\pi}{n}+2\pi i}=e^{i\frac{\pi(2n-k)}{n}}=z_{2n-k}$

Ceci permet alors d'écrire que : $S=\{1,z_1,z_2,\dots,z_{n-1},-1,\overline{z}_{n-1},\overline{z}_{n-2},\dots,\overline{z}_1\}$

Terminons en disant que $z_0,z_1,z_2,\dots,z_{2n-1}$ sont deux à deux distincts.

b) Ne chichitons pas et factorisons $X^{2n}-1$ dans $\mathbb{C}$. $X^{2n}-1$ est de degré $2n$, le coefficient de X^{2n} dans $X^{2n}-1$ est 1 et $X^{2n}-1$ admet $2n$ racines distinctes $z_0,z_1,\dots,z_{2n-1}$.

Par conséquent : $X^{2n}-1=\prod_{k=0}^{2n-1}(X-z_k)=(X-z_0)\left[\prod_{k=1}^{n-1}(X-z_k)\right](X-z_n)\left[\prod_{k=1}^{n-1}(X-\overline{z}_{n-k})\right]$

$X^{2n}-1=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}(X-z_k)\prod_{k=1}^{n-1}(X-\overline{z}_{n-k})=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}(X-z_k)\prod_{k=1}^{n-1}(X-\overline{z}_k)$ ← petit changement d'indice $n-k \mapsto k$.

$X^{2n}-1=(X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left[(X-e^{i\frac{k\pi}{n}})(X-e^{-i\frac{k\pi}{n}})\right]=(X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left[X^2-(e^{i\frac{k\pi}{n}}+e^{-i\frac{k\pi}{n}})X+e^{i\frac{k\pi}{n}}e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right]$

Finalement : $\underline{\underline{X^{2n}-1=(X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2-2\cos\frac{k\pi}{n}X+1\right)}}.$

ou encore $\forall y\in\mathbb{C}$, $y^{2n}-1=(y^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(y^2-2\cos\frac{k\pi}{n}y+1\right)$ pour tout $n\in[\![2,+\infty[\![$; si $n=1$ ...

Remarque.. Cette factorisation est à savoir faire par cœur.

(Q2) Commençons par prouver que $\int_0^\pi \ln(\lambda^2-2\lambda\cos x+1)\,dx$ existe pour tout $\lambda\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}$.

Soit $\lambda\in]0,1[\cup]1,+\infty[$.

$u_\lambda : x\mapsto \lambda^2-2\lambda\cos x+1$ est continue sur $[0,\pi]$

$\forall x\in[0,\pi]$, $u_\lambda(x)=(\lambda-\cos x)^2+1-\cos^2x=(\lambda-\cos x)^2+\sin^2x\geqslant 0$.

Si $x\in]0,\pi[$, $u_\lambda(x)=(\lambda-\cos x)^2+\sin^2x\geqslant\sin^2x>0$

Si $x\in\{0,\pi\}$, $u_\lambda(x)=(\lambda-1)^2$ ou $(\lambda+1)^2$; dans les deux cas $u_\lambda(x)>0$ car $\lambda\notin\{-1,1\}$.

Donc u_λ est continue et strictement positive sur $[0,\pi]$; par conséquent $x \mapsto \ln(u_\lambda(x))$ est définie et continue sur $[0,\pi]$.

Par conséquent pour tout λ dans $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$, l'intégrale $\int_0^\pi \ln(\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1)dx$ a un sens

a) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$.

$$u_n = \frac{\pi - 0}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(0 + k\,\frac{\pi - 0}{n}\right) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\lambda^2 - 2\lambda\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) = \frac{\pi}{n}\ln\left[\prod_{k=0}^{n-1}\left(\lambda^2 - 2\lambda\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)\right]$$

$$u_n = \frac{\pi}{n}\ln\left(\underline{(\lambda^2 - 2\lambda + 1)}\prod_{\underline{k=1}}^{n-1}\left(\lambda^2 - 2\lambda\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)\right) = \frac{\pi}{n}\ln\left((\lambda-1)\frac{1}{\lambda+1}\underbrace{(\lambda-1)(\lambda+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(\lambda^2 - 2\lambda\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)}_{\lambda^{2n}-1}\right)$$

Donc $\underline{u_n = \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{(\lambda-1)(\lambda^{2n}-1)}{\lambda+1}\right)}$ pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$ et même pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ↓

Remarque — Si $n = 1$: $u_1 = \frac{\pi}{1}\sum_{k=0}^{0} \ln\left(\lambda^2 - 2\lambda\cos\frac{k\pi}{1} + 1\right) = \pi\ln(\lambda-1)^2 = \frac{\pi}{1}\ln\left(\frac{(\lambda-1)(\lambda^{2\times1}-1)}{\lambda+1}\right)$

Par conséquent le résultat vaut bien pour $n = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = 2u_{2n} - u_n = 2\times\frac{\pi}{2n}\ln\left(\frac{(\lambda-1)(\lambda^{4n}-1)}{\lambda+1}\right) - \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{(\lambda-1)(\lambda^{2n}-1)}{\lambda+1}\right) = \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{\frac{(\lambda-1)(\lambda^{4n}-1)}{\lambda+1}}{\frac{(\lambda-1)(\lambda^{2n}-1)}{\lambda+1}}\right)$$

$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{\lambda^{4n}-1}{\lambda^{2n}-1}\right)}$ ou $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{\pi}{n}\ln(\lambda^{2n}+1)}$.

b) $x \mapsto \ln(u_\lambda(x))$ étant continue sur $[0,\pi]$: $\underline{J = \int_0^\pi \ln(\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1)dx = \lim_{n\to+\infty} u_n}$. (cours !)

Soit $\lambda \in]0,1[$. $\lim_{n\to+\infty}\lambda^{2n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \times \ln\left(\frac{-(\lambda-1)}{\lambda+1}\right) = 0$!

Soit $\lambda \in]1,+\infty[$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\pi}{n}\ln\left(\lambda^{2n}\times\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)\left(1 - \frac{1}{\lambda^{2n}}\right)\right) = \frac{\pi}{n}\ln\lambda^{2n} + \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\left(1 - \frac{1}{\lambda^{2n}}\right)\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2\pi\ln\lambda + \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\left(1 - \frac{1}{\lambda^{2n}}\right)\right)$; $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2\pi\ln\lambda$ car $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\lambda^{2n}} = 0$

Par conséquent : $\underline{\text{si } \lambda \in]0,1[: J = 0 \text{ et si } \lambda \in]1,+\infty[,\ J = 2\pi\ln\lambda}$

Remarque — Plus généralement, pour tout $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$, $\int_0^\pi \ln(\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1)dx$ est une intégrale "propre" qui vaut 0 si $|\lambda| < 1$ et $\pi\ln\lambda^2$ si $|\lambda| > 1$. C'est l'intégrale de Poisson. **Exercice** — Et pour $\lambda \in \{-1,1\}$?

cherchons un équivalent pour $u_n - J$ et pour $v_n - J$.

1er cas.. $\lambda \in]0,1[$.

- $u_n - J = \frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{(\lambda-1)(\lambda^{2n}-1)}{\lambda+1}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{(\lambda-1)(\lambda^{2n}-1)}{\lambda+1}\right) = \ln\left(\frac{-(\lambda-1)}{\lambda+1}\right) = \ln\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) \neq 0$, donc $u_n - J \sim \pi \ln\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) \times \frac{1}{n}$.

- $v_n - J = \frac{\pi}{n} \ln(\lambda^{2n}+1) \sim \frac{\pi}{n}(\lambda^{2n}+1-1) \sim \frac{\pi\lambda^{2n}}{n}$; $v_n - J \sim \frac{\pi\lambda^{2n}}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda^{2n}+1) = 0$

2ème cas.. $\lambda \in]1,+\infty[$

- $u_n - J \underset{\uparrow}{=} \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\left(1-\frac{1}{\lambda^{2n}}\right)\right) \sim \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\left(1-\frac{1}{\lambda^{2n}}\right)\right) = \ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right) \neq 0$.

voir page précédente

- $v_n - J = \frac{\pi}{n}\ln(\lambda^{2n}+1) - 2\pi\ln\lambda = \frac{\pi}{n}\ln\lambda^{2n} + \frac{\pi}{n}\ln\left(1+\frac{1}{\lambda^{2n}}\right) - 2\pi\ln\lambda = \frac{\pi}{n}\ln\left(1+\frac{1}{\lambda^{2n}}\right)$

$v_n - J \sim \frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{\lambda^{2n}}\right)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\lambda^{2n}}\right) = 1$.

conclusion.. $\forall \lambda \in]0,1[\cup]1,+\infty[$: $u_n - J \sim \pi \ln\left|\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right| \times \frac{1}{n}$.

$\forall \lambda \in]0,1[$, $v_n - J \sim \frac{\pi\lambda^{2n}}{n}$ et $\forall \lambda \in]1,+\infty[$, $v_n - J \sim \frac{\pi}{n\lambda^{2n}}$

Remarque.. ceci indique clairement que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est plus "performante" que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice.. Trouver un équivalent de $w_n - J$.

PARTIE III

(Q1) a) $x \mapsto \int_\alpha^x f(t)\,dt$ et $x \mapsto (x-\alpha)f(x)$ sont dérivables sur $[\alpha,\beta]$ donc p est dérivable sur $[\alpha,\beta]$.

$\forall x \in [\alpha,\beta]$, $p'(x) = f(x) - f(\alpha)$. p' est alors dérivable sur $[\alpha,\beta]$ et :

$\forall x \in [\alpha,\beta]$, $p''(x) = f'(x)$. Notons que : $\forall x \in [\alpha,\beta]$, $-|f'(x)| \leq f'(x) \leq |f'(x)|$

f' est continue sur $[a,b]$ donc sur $[\alpha,\beta]$, par conséquent :

$\forall x \in [\alpha,\beta]$, $-M_1 \leq -\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} |f'(x)| \leq f'(x) = p''(x) \leq \sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} |f'(x)| \leq M_1$

Finalement : $\underline{\forall x\in[\alpha,\beta],\ -\Pi_1 \leq p''(x) \leq \Pi_1}$.

Donc $\forall u\in[\alpha,\beta],\ -\Pi_1\int_\alpha^u dx \leq \int_\alpha^u p''(x)dx \leq \Pi_1\int_\alpha^u dx$ $\quad(\alpha\leq u\,!)$

$\forall u\in[\alpha,\beta],\ -\Pi_1(u-\alpha) \leq p'(u)-p'(\alpha) \leq \Pi_1(u-\alpha)$

ou $\underline{\forall u\in[\alpha,\beta],\ -\Pi_1(u-\alpha)\leq p'(u)\leq \Pi_1(u-\alpha)}$ car $p'(\alpha)=0$.

Intégrons de nouveau. Pourquoi pas ~~entre~~ α et β !

$$-\Pi_1\int_\alpha^\beta(u-\alpha)du \leq \int_\alpha^\beta p'(u)du \leq \Pi_1\int_\alpha^\beta(u-\alpha)\,du \qquad (\alpha\leq\beta)$$

$$-\Pi_1\left[\frac{(u-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^\beta \leq p(\beta)-p(\alpha) \leq \Pi_1\left[\frac{(u-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^\beta$$

Or $p(\alpha)=0$ et $p(\beta)=\int_\alpha^\beta f(t)dt-(\beta-\alpha)f(\alpha)$. Il vient alors :

$-\Pi_1\frac{(\beta-\alpha)^2}{2} \leq \int_\alpha^\beta f(t)dt-(\beta-\alpha)f(\alpha) \leq \Pi_1\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$. Par conséquent :

$$\underline{\underline{\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt-(\beta-\alpha)f(\alpha)\right| \leq \Pi_1\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}}}.$$

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$|J-u_n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(t)dt-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\right| \overset{\frac{b-a}{n}=x_{k+1}-x_k}{=} \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(t)dt-(x_{k+1}-x_k)f(x_k)\right)\right|$$

$$|J-u_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(t)dt-(x_{k+1}-x_k)f(x_k)\right| \underset{b)}{\leq} \sum_{k=0}^{n-1}\Pi_1\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2}=\sum_{k=0}^{n-1}\Pi_1\frac{(b-a)^2}{2n^2}=\frac{\Pi_1(b-a)^2}{2n}.$$

$\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |J-u_n|\leq\frac{\Pi_1(b-a)^2}{2n}}}$ ... ce n'est pas nouveau ... majoration de l'erreur dans la méthode des rectangles.

Q2 a) p est deux fois dérivable sur $[\alpha,\beta]$ et $x\mapsto\frac{(x-\alpha)[f(x)-f(\alpha)]}{2}$ aussi ; par conséquent q est deux fois dérivable sur $[\alpha,\beta]$.

$\forall x\in[\alpha,\beta],\ q'(x)=p'(x)-\frac{f(x)-f(\alpha)}{2}-(x-\alpha)\frac{f'(x)}{2}$. Notons que $q(\alpha)=q'(\alpha)=0$.

$\forall x\in[\alpha,\beta],\ q''(x)=p''(x)-\frac{f'(x)}{2}-\frac{f'(x)}{2}-(x-\alpha)\frac{f''(x)}{2}=f'(x)-\frac{f'(x)}{2}-\frac{f'(x)}{2}-(x-\alpha)\frac{f''(x)}{2}=-(x-\alpha)\frac{f''(x)}{2}.$

$$\forall x \in [\alpha,\beta],\ q''(x) = -(x-\alpha)\frac{f''(x)}{2}.$$

b) Pour varier les plaisirs nous n'allons pas encadrer q'' mais majorer sa valeur absolue.

$$\forall x\in[\alpha,\beta],\ |q''(x)| = |x-\alpha|\frac{|f''(x)|}{2} \leq \frac{|x-\alpha|}{2} M_2 \quad \left(M_2 = \max_{t\in[a,b]} |f''(t)| = \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)| \ !\right)$$

Il vient alors :

$$\forall u\in[\alpha,\beta],\ |q'(u)| \underset{q'(\alpha)=0}{=} |q'(u)-q'(\alpha)| = \left|\int_\alpha^u q''(x)dx\right| \underset{\alpha\leq u}{\leq} \int_\alpha^u |q''(x)|dx \leq \int_\alpha^u \frac{|x-\alpha|}{2} M_2\, dx$$

$$\forall u\in[\alpha,\beta],\ |q'(u)| \leq \int_\alpha^u \frac{(x-\alpha)}{2}M_2\,dx = \frac{M_2}{2}\left[\frac{(x-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^u = \frac{M_2}{4}(u-\alpha)^2.$$

Ne reste plus qu'à recommencer entre α et β.

$$|q(\beta)| \underset{q(\alpha)=0}{=} |q(\beta)-q(\alpha)| = \left|\int_\alpha^\beta q'(u)du\right| \leq \int_\alpha^\beta |q'(u)|du \leq \int_\alpha^\beta \frac{M_2}{4}(u-\alpha)^2du = \frac{M_2}{4}\left[\frac{(u-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^\beta$$

Finalement : $|q(\beta)| \leq \frac{M_2}{12}(\beta-\alpha)^3$. C'est à dire :

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt - (\beta-\alpha)f(\alpha) - \frac{(\beta-\alpha)(f(\beta)-f(\alpha))}{2}\right| \leq \frac{(\beta-\alpha)^3}{12}M_2.$$

c) Ce qui précède donne :

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - (x_{k+1}-x_k)f(x_k) - \frac{(x_{k+1}-x_k)(f(x_{k+1})-f(x_k))}{2}\right| \leq \frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{12}M_2 \quad \text{ou :}$$

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{n}f(x_k) - \frac{b-a}{2n}(f(x_{k+1})-f(x_k))\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^3}M_2.$$

Donc

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{n}f(x_k) - \frac{b-a}{2n}(f(x_{k+1})-f(x_k))\right)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{n}f(x_k) - \frac{b-a}{2n}(f(x_{k+1})-f(x_k))\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^3M_2}{12n^3} = \frac{(b-a)^3M_2}{12n^2}$$

ce qui donne encore :

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k) - \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1})-f(x_k))\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2.$$ Pour finir :

$$\left|\int_a^b f(t)dt - u_n - \frac{b-a}{2n}(f(b)-f(a))\right| \leq \frac{(b-a)^3M_2}{12n^2}.$$

(Q3) Et pour la troisième fois on dérive trois fois.

Rappelons que : $\forall x\in[\alpha,\beta]$, $q''(x) = -(x-\alpha)\dfrac{f''(x)}{2}$ et $r(x) = q(x) + \dfrac{(x-\alpha)^2[f'(x)-f'(\alpha)]}{12}$.

q et $x \mapsto \dfrac{(x-\alpha)^2[f'(x)-f'(\alpha)]}{12}$ sont trois fois dérivable sur $[\alpha,\beta]$ (f est C^4 sur $[a,b]$).

→ $r(\alpha)=0$

→ $\forall x\in[\alpha,\beta]$, $r'(x) = q'(x) + \dfrac{(x-\alpha)[f'(x)-f'(\alpha)]}{6} + \dfrac{(x-\alpha)^2 f''(x)}{12}$; $r'(\alpha)=0$.

→ $\forall x\in[\alpha,\beta]$, $r''(x) = \underbrace{-(x-\alpha)\dfrac{f''(x)}{2}}_{q''(x)} + \dfrac{f'(x)-f'(\alpha)}{6} + \dfrac{(x-\alpha)f''(x)}{6} + \dfrac{(x-\alpha)f''(x)}{6} + \dfrac{(x-\alpha)^2 f'''(x)}{12}$

$\forall x\in[\alpha,\beta]$, $r''(x) = -(x-\alpha)f''(x)\Big[\underbrace{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{6}}_{1/6}\Big] + \dfrac{f'(x)-f'(\alpha)}{6} + \dfrac{(x-\alpha)^2 f'''(x)}{12}$; $r''(\alpha)=0$.

$\forall x\in[\alpha,\beta]$, $r'''(x) = -\frac{1}{6}f''(x) - \frac{1}{6}(x-\alpha)f'''(x) + \frac{1}{6}f''(x) + \frac{1}{6}(x-\alpha)f'''(x) + \dfrac{(x-\alpha)^2 f^{(4)}(x)}{12}$.

$\forall x\in[\alpha,\beta]$, $r'''(x) = \dfrac{(x-\alpha)^2 f^{(4)}(x)}{12}$. Donc : $\forall x\in[\alpha,\beta]$, $|r'''(x)| \leq \dfrac{(x-\alpha)^2}{12} M_4$.

Intégrons trois fois.

$\forall u\in[\alpha,\beta]$, $|r''(u)| \overset{r''(\alpha)=0}{=} |r''(u)-r''(\alpha)| = \left|\int_\alpha^u r'''(x)dx\right| \overset{\alpha\leq u}{\leq} \int_\alpha^u |r'''(x)|dx \leq \int_\alpha^u \dfrac{(x-\alpha)^2}{12}M_4\,dx = \dfrac{(u-\alpha)^3}{36}M_4$.

$\forall v\in[\alpha,\beta]$, $|r'(v)| \overset{r'(\alpha)=0}{=} |r'(v)-r'(\alpha)| = \left|\int_\alpha^v r''(u)du\right| \overset{\alpha\leq v}{\leq} \int_\alpha^v |r''(u)|du \leq \int_\alpha^v \dfrac{(u-\alpha)^3}{36}M_4\,du = M_4\dfrac{(v-\alpha)^4}{4\times 36}$

$\forall v\in[\alpha,\beta]$, $|r'(v)| \leq M_4\dfrac{(v-\alpha)^4}{144}$.

$|r(\beta)| \overset{r(\alpha)=0}{=} |r(\beta)-r(\alpha)| = \left|\int_\alpha^\beta r'(v)dv\right| \leq \int_\alpha^\beta |r'(v)|dv \leq \int_\alpha^\beta \dfrac{M_4(v-\alpha)^4}{144}dv = \dfrac{M_4(\beta-\alpha)^5}{5\times 144}$

$|r(\beta)| \leq \dfrac{M_4(\beta-\alpha)^5}{720}$. Ceci s'écrit encore :

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt - (\beta-\alpha)f(\alpha) - \frac{(\beta-\alpha)[f(\beta)-f(\alpha)]}{2} + \frac{(\beta-\alpha)^2[f'(\beta)-f'(\alpha)]}{12}\right| \leq \frac{M_4(\beta-\alpha)^5}{720}$$

Posons pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $A_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - (x_{k+1}-x_k)f(x_k) - \dfrac{(x_{k+1}-x_k)[f(x_{k+1})-f(x_k)]}{2} + \dfrac{(x_{k+1}-x_k)^2[f'(x_{k+1})-f'(x_k)]}{12}$

Ce qui précède indique que : $|A_k| \leq \dfrac{M_4(x_{k+1}-x_k)^5}{720} = \dfrac{M_4(b-a)^5}{720n^5}$ pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$.

donc $\left|\sum_{k=0}^{n-1} A_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}|A_k| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{M_4(b-a)^5}{720n^5} = \dfrac{M_4(b-a)^5}{720n^4}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x_{k+1}-x_k)}{2}[f(x_{k+1})-f(x_k)] + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x_{k+1}-x_k)^2[f'(x_{k+1})-f'(x_k)]}{12}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k = \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) - \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1})-f(x_k)) + \frac{(b-a)^2}{12n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(f'(x_{k+1})-f'(x_k))$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k = J - u_n - \frac{b-a}{2n}(f(b)-f(a)) + \frac{(b-a)^2}{12n^2}(f'(b)-f'(a)).$$

Par conséquent : $\underline{\left|J - u_n - \frac{b-a}{2n}(f(b)-f(a)) + \frac{(b-a)^2}{12n^2}(f'(b)-f'(a))\right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{720n^4}M_4.}$

(Q4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $\varepsilon_n = n^3\left[u_n - J + \frac{b-a}{2n}(f(b)-f(a)) - \frac{(b-a)^2(f'(b)-f'(a))}{12n^2}\right]$

Ce qui précède indique que : $|-\varepsilon_n| = n^3\left|J-u_n - \frac{b-a}{2n}(f(b)-f(a)) + \frac{(b-a)^2}{12n^2}(f'(b)-f'(a))\right| \leqslant \frac{(b-a)^5 M_4}{720n}$

donc $\lim_{n\to+\infty}(-\varepsilon_n)=0$; $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$!

Par conséquent : $u_n = J - \frac{b-a}{2n}f(b)-f(a) + \frac{(b-a)^2(f'(b)-f'(a))}{12n^2} + \frac{\varepsilon_n}{n^3}$

$$\underline{u_n = J + \left(-\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a))\right)\frac{1}{n} + \frac{(b-a)^2(f'(b)-f'(a))}{12}\frac{1}{n^2} + 0\times\frac{1}{n^3} + \frac{\varepsilon_n}{n^3}.}$$

C'est le "développement limité" de u_n à l'ordre 3.

Pour simplifier, écrivons $u_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \frac{D}{n^3} + \frac{\varepsilon_n}{n^3}$ avec $A = J$, $B = -\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a))$, $C = \frac{(b-a)^2}{12}(f'(b)-f'(a))$ et $D = 0$.

$$v_n = 2u_{2n} - u_n = 2A + 2\frac{B}{2n} + \frac{2C}{4n^2} + \frac{2D}{8n^3} + \frac{\varepsilon_{2n}}{8n^3} - A - \frac{B}{n} - \frac{C}{n^2} - \frac{D}{n^3} - \frac{\varepsilon_n}{n^3}$$

$v_n = A - \frac{C}{2n^2} - \frac{3D}{4n^3} + \frac{1}{n^3}\left(\frac{\varepsilon_{2n}}{8} - \varepsilon_n\right)$. Posons $\hat{\varepsilon}_n = \frac{\varepsilon_{2n}}{8} - \varepsilon_n$; il vient :

$\underline{v_n = A - \frac{C}{2n^2} - \frac{3D}{4n^3} + \frac{1}{n^3}\hat{\varepsilon}_n \text{ avec } \lim_{n\to+\infty}\hat{\varepsilon}_n = 0}$; c'est le "dl 3" de v_n.

ce qui s'écrit encore $\underline{v_n = J - \frac{(b-a)^2(f'(b)-f'(a))}{24n^2} + \frac{1}{n^3}\hat{\varepsilon}_n}$ ... avec $\lim_{n\to+\infty}\hat{\varepsilon}_n = 0$

$$w_n = \frac{1}{3}(4v_{2n} - v_n) = \frac{1}{3}\left(4A - \frac{4C}{8n^2} - \frac{12D}{32n^3} + \frac{4}{8n^3}\hat{\varepsilon}_{2n} - A + \frac{C}{2n^2} + \frac{3D}{4n^3} - \frac{1}{n^3}\hat{\varepsilon}_n\right)$$

$$w_n = A + \frac{D}{8n^3} + \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{6}\hat{\varepsilon}_{2n} - \frac{1}{3}\hat{\varepsilon}_n\right).$$ Posons $\check{\varepsilon}_n = \frac{1}{6}\hat{\varepsilon}_{2n} - \frac{1}{3}\hat{\varepsilon}_n$

Il vient : $w_n = A + \frac{D}{8n^3} + \frac{\check{\varepsilon}_n}{n^3}$ avec $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \check{\varepsilon}_n = 0$

ou $\underline{\underline{w_n = J + \frac{\check{\varepsilon}_n}{n^3} \text{ avec } \lim\limits_{n\mapsto\infty} \check{\varepsilon}_n = 0}}$.

Remarques 1.. Si $B \neq 0$: $u_n - J \sim \frac{B}{n}$; si $C \neq 0$: $v_n - J \sim -\frac{C}{2n^2}$; et $w_n - J = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.
On accélère donc la convergence en passant de $(u_n)_{n\geq 1}$ à $(v_n)_{n\geq 1}$ puis de $(v_n)_{n\geq 1}$ à $(w_n)_{n\geq 1}$.

2.. Le processus d'accélération de la convergence proposé ici est classique et dû à RICHARDSON (ROMBERG l'a exploité pour calculer des valeurs approchées d'intégrales). Expliquons en de manière un peu " naïve " le principe. Partons de $u_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \frac{D}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$
"Pourvu" que B ne soit pas nul : $u_n - A \sim \frac{B}{n}$; la convergence de (u_n) vers A est pitoyable.
Accélérons la en supprimant le terme $\frac{B}{n}$!
Remarquons pour cela que :
$$\begin{cases} u_{2n} = A + \frac{B}{2n} + \frac{C}{4n^2} + \frac{D}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \text{et} \\ u_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \frac{D}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{cases}$$

Eliminons à l'aide d'une combinaison linéaire " le $1/n$ " !
Multiplions la première égalité par 2 et la seconde par -1
Il vient $2u_{2n} - u_n = A - \frac{C}{2n^2} - \frac{3D}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ ... et on retrouve v_n !

$v_n = A + \frac{C'}{n^2} + \frac{D'}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et (v_n) converge toujours vers A. Accélérons encore.

$$\left.\begin{cases} v_{2n} = A + \frac{C'}{4n^2} + \frac{D'}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) & \times 4 \\ v_n = A + \frac{C'}{n^2} + \frac{D'}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) & \times -1 \end{cases}\right] \leftarrow \text{suppression du terme " } 1/n^2 \text{ "}$$

Alors $4v_{2n} - v_n = \underline{\underline{3}}A - \frac{D'}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ ... et pour obtenir une suite qui converge vers A

divisons par 3. $\frac{4v_{2n} - v_n}{3} = A - \frac{D'}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et on retrouve w_n

Je vous laisse poursuivre.

3.. Les gens intéressés par ROMBERG pourront consulter $\begin{cases} \text{Mathématiques et informatique} \\ \text{ROUAN / DEBEAUMARCHÉ / Ellipse} \end{cases}$