I **Q1** a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{(1-x)e^x+1}{(e^x+1)^2}$.

b) Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = (1-x)e^x+1$. Notons que le signe de f' sur $\mathbb{R}_+$ est celui de g.

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) < 0$ et $g'(0) = 0$.

Par conséquent : g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. g définit donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur l'intervalle $g(\mathbb{R}_+)$

Notons que $g(0) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$; ceci et ce qui précède donnent $g(\mathbb{R}_+) =]-\infty, 2]$.

- g définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty, 2]$.

Comme $0 \in]-\infty, 2]$: $\exists! \, \alpha \in \mathbb{R}_+$, $g(\alpha) = 0$.

Mieux : $\forall x \in [0, \alpha[$, $g(x) > 0$; $g(\alpha) = 0$; $\forall x \in]\alpha, +\infty[$, $g(x) < 0$.

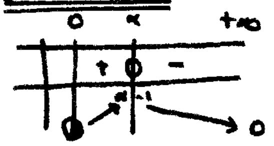
Clairement 1.. α est l'unique zéro de f' sur $\mathbb{R}_+$

2.. $\forall x \in [0, \alpha[$, $f'(x) > 0$; $f'(\alpha) = 0$; $\forall x \in]\alpha, +\infty[$, $f'(x) < 0$.

Remarque.. Par dichotomie on obtient $\alpha \simeq 1{,}278\ 464\ 543$

c.. $0 = g(\alpha) = (1-\alpha)e^\alpha + 1$ donc $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$; $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{e^\alpha+1} = \dfrac{\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1} = \alpha - 1$

$f(\alpha) = \alpha - 1$

d.. 

($\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{1}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$)

Pour ce qui est de l'allure ... voir votre machine.

Q2 Approximation de α (... l'incontournable th. du point fixe)

a) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = x \iff 1 + e^{-x} = x \iff 1 - x + e^{-x} = 0 \iff (1-x)e^x + 1 = 0 \iff x = \alpha$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = x \iff x = \alpha$. α est l'unique solution de $\varphi(x) = x$.

b) $(1-\alpha)e^\alpha + 1 = 0$ donc $\alpha - 1 = e^{-\alpha} > 0$; $\alpha > 1$.

$\alpha > 1$ donne $e^{-\alpha} < e^{-1}$ donc $\alpha - 1 < e^{-1}$

c) Soit $x \in [1, +\infty[$.

$\varphi(x) - 1 = e^{-x} > 0$. donc $\forall x \in [1, +\infty[$, $\varphi(x) > 1$; en particulier

$\forall x \in [1, +\infty[$, $\varphi(x) \geq 1$; ceci prouve que l'intervalle $[1, +\infty[$ est stable par φ.

$\forall x \in [1, +\infty[$, $\varphi'(x) = -e^{-x}$ donc $\forall x \in [1, +\infty[$, $|\varphi'(x)| = e^{-x} \leq e^{-1}$

L'inégalité des A.F. donne alors : $\forall (x,y) \in [1, +\infty[^2$, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq e^{-1}|x-y|$

Comme $\alpha \in [1, +\infty[$ et $\varphi(\alpha) = \alpha$: $\forall x \in [1, +\infty[$, $|\varphi(x) - \alpha| \leq e^{-1}|x - \alpha|$

d) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in [1, +\infty[$ et $|\alpha_n - \alpha| \leq e^{-(n+1)}$

↑ Inutile car dans le texte, mais...

- C'est vrai pour $n=0$ ($\alpha_0 = 1 \in [1,+\infty[$ et $|\alpha_0-\alpha| = \alpha - 1 \le e^{-1} = e^{-(0+1)}$).
- Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$. $\alpha_{n+1}=\varphi(\alpha_n)$. Comme $\alpha_n\in[1,+\infty[$ et que cet intervalle est stable par φ : $\alpha_{n+1}\in[1,+\infty[$.

  $|\alpha_{n+1}-\alpha| = |\varphi(\alpha_n)-\alpha| \le e^{-1}|\alpha_n-\alpha| \underset{H.R.}{\le} e^{-1}e^{-(n+1)} = e^{-(n+2)} = e^{-((n+1)+1)}$. Ceci achève la récurrence.

e) Soit $n\in\mathbb{N}$. $|\alpha_n-\alpha|\le e^{-(n+1)}$. Pour avoir $|\alpha_n-\alpha|\le 10^{-6}$ il suffit d'avoir $e^{-(n+1)}\le 10^{-6}$.
$e^{-(n+1)}\le10^{-6} \iff -(n+1)\le -6\ln 10 \iff n\ge 6\ln10-1$. $6\ln 10 - 1 \simeq 12,81$, par conséquent en posant $\bar\alpha = u_{13}$ on obtient : $|\alpha-\bar\alpha|\le10^{-6}$. Notons que $\bar\alpha=u_{13}\simeq 1,278\,464\,562$.

II ETUDE D'UNE SUITE DE FONCTIONS

(Q1) Montrons par récurrence que u_n est polynomiale.

- C'est vrai pour $n=0$ car $u_0=1$ - Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$x\mapsto \frac{x}{2}u_n(x)$ est polynomiale comme produit de deux fonctions polynomiales.

$x\mapsto 1-x+\frac x2 u_n(x)$ est polynomiale comme somme de deux fonctions polynomiales.

Enfin $u_{n+1}: x\mapsto [1-x+\frac x2 u_n(x)]u_n(x)$ est polynomiale comme produit de deux fonctions polynomiales. Ceci achève la récurrence.

" $1-x+\frac x2 u_n(x)$ " n'est pas le polynôme nul.

Notons d_n le degré de u_n. $\deg u_{n+1} = \deg$ " $1-x+\frac x2u_n(x)$ " $+ \deg u_n \ge \deg u_n$; $d_{n+1}\ge d_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. $(d_n)_{n\ge0}$ est croissante. En particulier $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $d_n\ge d_1=1$.

Par conséquent : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\deg$ " $1-x+\frac x2u_n(x)$ " $= \deg$ " $\frac x2 u_n(x)$ " $= d_n+1$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $d_{n+1}=2d_n+1$. Cette égalité vaut encore pour $n=0$ car $d_0=0$ et $d_1=1$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $d_{n+1}=2d_n+1$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $d_{n+1}+1=2(d_n+1)$. La suite $(d_n+1)_{n\ge0}$ est géométrique de raison 2. $\forall n\in\mathbb{N}$, $d_n+1=2^n(d_0+1)=2^n$.

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}$, $d_n=2^n-1$.

Notons $\hat\alpha_n$ le coefficient dominant de u_n. $\hat\alpha_0=1$ et $\hat\alpha_1=-1/2$

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\ge1$. $\forall x\in[0,1]$, $u_{n+1}=[1-x+\frac x2u_n(x)]u_n(x)$.

Le coefficient dominant de $1-x+\frac x2 u_n(x)$ est celui de $\frac x2u_n(x)$ car $d_n\ge1$

Celui de $\frac x2u_n(x)$ est : $\frac12\hat\alpha_n$. Par conséquent $\hat\alpha_{n+1}=\frac12\hat\alpha_n\times\hat\alpha_n$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\hat\alpha_{n+1}=\frac12(\hat\alpha_n)^2$

Donc $\hat\alpha_2=\frac12\left(-\frac12\right)^2=\frac1{2^3}$; $\hat\alpha_3=\frac12\left(\frac1{2^3}\right)^2=\frac1{2^7}$; $\hat\alpha_4=\frac12\left(\frac1{2^7}\right)^2=\frac1{2^{15}}$.

Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\ge2 \Rightarrow \hat\alpha_n=\dfrac1{2^{2^n-1}}$

- C'est vrai pour $n=2$.
- Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}$ et $n\ge2$ et montrons la pour $n+1$.

$$\hat\alpha_{n+1}=\frac12\hat\alpha_n^2=\frac12\left(\frac1{2^{2^n-1}}\right)^2=\frac12\times\frac1{2^{(2^n-1)\times2}}=\frac1{2^{1+2^{n+1}-2}}=\frac1{2^{2^{n+1}-1}}$$

Ceci achève la récurrence.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\ge2 \Rightarrow \hat\alpha_n=\dfrac1{2^{2^{n+1}-1}}$.

Q2 Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ 0 < u_n(x) \leq 1$

- C'est clair pour $n=0$ car $u_0 = 1$
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

Soit $x \in [0,1]$.

$0 < u_n(x) \leq 1$ donc $0 \leq \frac{x}{2} u_n(x) \leq \frac{x}{2}$; $1-x \leq 1-x+\frac{x}{2}u_n(x) \leq 1-x+\frac{x}{2} = 1-\frac{x}{2}$

Comme $u_n(x) > 0$: $(1-x)u_n(x) \leq \left(1-x+\frac{x}{2}u_n(x)\right)u_n(x) = u_{n+1}(x) \leq (1-\frac{x}{2})u_n(x)$

$1-\frac{x}{2} \geq 0$ et $0 < u_n(x) \leq 1$ donc : $u_n(x)\ (1-\frac{x}{2}) \leq 1-\frac{x}{2}$; comme $1-\frac{x}{2} \leq 1$ on obtient : $(1-x)u_n(x) \leq u_{n+1}(x) \leq 1$.

Ne reste plus qu'à montrer que : $u_{n+1}(x) > 0$

$(1-x)u_n(x) \geq 0$ car $1-x \geq 0$ et $u_n(x) > 0$; donc $u_{n+1}(x) \geq 0$.

Supposons $u_{n+1}(x) = 0$; comme $u_n(x) > 0$ on a alors : $1-x+\frac{x}{2}u_n(x) = 0$;

par conséquent : $\frac{x}{2}u_n(x) = x-1 \leq 0$

ou $x=1$ et $u_n(x)=0$!!

ou $x<1$ et $u_n(x) \times \frac{x}{2} < 0$!!

On ne peut donc avoir $u_{n+1}(x) = 0$.

Finalement $0 < u_{n+1}(x) \leq 1$ et ceci achève la récurrence.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ u'_n(x) \leq 0$.

- C'est clair pour $n=0$ car $u'_0 = 0$.
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$\forall x \in [0,1],\ u'_{n+1}(x) = \left[-1+\frac{1}{2}u_n(x)+\frac{x}{2}u'_n(x)\right]u_n(x) + \left[1-x+\frac{x}{2}u_n(x)\right]u'_n(x)$.

$\forall x \in [0,1],\ -1+\frac{1}{2}u_n(x)+\frac{x}{2}u'_n(x) \leq -1+\frac{1}{2}+\frac{x}{2}u'_n(x) = -\frac{1}{2}+\frac{x}{2}u'_n(x) \leq 0$

donc $\forall x \in [0,1],\ \left[-1+\frac{1}{2}u_n(x)+\frac{x}{2}u'_n(x)\right]u_n(x) \leq 0$. $\quad - \quad (+ \quad -)$

$\forall x \in [0,1],\ 1-x+\frac{x}{2}u_n(x) \geq 0$ $\quad (1-x \geq 0$ et $u_n(x) \geq 0)$; donc

$\forall x \in [0,1],\ \left[1-x+\frac{x}{2}u_n(x)\right]u'_n(x) \leq 0$ $\quad (u'_n(x) \leq 0)$.

Finalement $\forall x \in [0,1],\ u'_{n+1}(x) \leq 0$ (... somme de deux quantités négatives).

Q3 a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ (1-x)^n \leq u_n(x) \leq (1-\frac{x}{2})^n$

$\forall x \in [0,1],\ u_1(x) = 1-x+\frac{x}{2} = 1-\frac{x}{2}$

donc $\forall x \in [0,1],\ (1-x)^1 \leq u_1(x) \leq (1-\frac{x}{2})^1$; la propriété est vraie pour $n=1$.

Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$. Soit $x \in [0,1]$;

$1-x+\frac{x}{2}u_n(x) \leq 1-x+\frac{x}{2} = 1-\frac{x}{2}$ car $u_n(x) \leq 1$ et $\frac{x}{2} \geq 0$.

En multipliant par $u_n(x)$ qui est positif on obtient : $u_{n+1}(x) = \left[1-x+\frac{x}{2}u_n(x)\right]u_n(x) \leq (1-\frac{x}{2})u_n(x)$

donc $u_{n+1}(x) \leq (1-\frac{x}{2})u_n(x) \underset{\uparrow \text{H.R}}{\leq} (1-\frac{x}{2})(1-\frac{x}{2})^n = (1-\frac{x}{2})^{n+1}$.

De même $1-x+\frac{x}{2}u_n(x) \geq 1-x$ car $\frac{x}{2}u_n(x) \geq 0$

donc $u_{n+1}(x) = \left(1-x+\frac{x}{2}u_n(x)\right)u_n(x) \underset{u_n(x)\geq 0}{\geq} (1-x)\,u_n(x) \underset{\text{" H.R. } + (1-x)\geq 0\text{ "}}{\geq} (1-x)(1-x)^n = (1-x)^{n+1}$

Finalement : $\forall x\in[0,1]$, $(1-x)^{n+1} \leq u_{n+1}(x) \leq \left(1-\frac{x}{2}\right)^{n+1}$. ceci achève la récurrence.

b) Si $x=0$: $\forall n\in\mathbb{N}$, $1\leq u_n(x)\leq 1$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n(x)=1$. $(u_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers 1.

Soit $x\in]0,1]$. $|1-x|<1$ et $|1-\frac{x}{2}|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-x)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{2}\right)^n = 0$; par encadrement $(u_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Conclusion.. Si $x=0$: $(u_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers 1, si $x\in]0,1]$, $(u_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers 0.

La suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 0}$ converge donc vers la fonction u définie par : $\begin{cases} u(0)=1 \text{ et} \\ \forall x\in]0,1], u(x)=0 \end{cases}$.

Notons que les fonctions u_n sont continues sur $[0,1]$ mais pas la fonction u ne l'est pas.

Il ne fait pas de doute que la convergence est uniforme.

c) Soit $x\in[0,1]$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}(x)-u_n(x) = \left(-x+\frac{x}{2}u_n(x)\right)u_n(x) = x\,u_n(x)\times\frac{(-1)}{2}\left[2-u_n(x)\right]$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $x\,u_n(x)\geq 0$ et $2-u_n(x)>0$

donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}(x)-u_n(x)\leq 0$.

Par conséquent la suite $(u_n(x))_{n\geq 0}$ est décroissante pour tout $x\in[0,1]$.

Q4 a) h est dérivable sur $[0,1]$. $\forall t\in[0,1]$, $h'(t)=1-t$

$\forall t\in[0,1]$, $|h'(t)| = |1-t| \leq 1$

L'inégalité des accroissements finis donne : $\forall (a,b)\in[0,1]^2$, $|h(b)-h(a)|\leq|b-a|$.

b) Soit $k\in\mathbb{N}$ et soit $x\in[0,1]$.

$$\left|[u_k(x)-u_{k+1}(x)]-[u_{k+1}(x)-u_{k+2}(x)]\right| = \left|u_k(x)\left[x-\frac{x}{2}u_k(x)\right]-u_{k+1}(x)\left[x-\frac{x}{2}u_{k+1}(x)\right]\right|$$
$$= |x\,h(u_k(x)) - x\,h(u_{k+1}(x))| = |x|\,|h(u_k(x))-h(u_{k+1}(x))|.$$
$$\leq |x|\,|u_k(x)-u_{k+1}(x)| = x\,|u_k(x)-u_{k+1}(x)|.$$

donc $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[0,1]$, $\left|[u_k(x)-u_{k+1}(x)]-[u_{k+1}(x)-u_{k+2}(x)]\right|\leq x\,|u_k(x)-u_{k+1}(x)|$.

c) Soit $x\in[0,1[$.

$(u_k(x))_{k\geq 0}$ est décroissante donc $\forall k\in\mathbb{N}$, $0\leq u_k(x)-u_{k+1}(x)$.

$\forall k\in\mathbb{N}$, $[u_k(x)-u_{k+1}(x)]-[u_{k+1}(x)-u_{k+2}(x)] \leq \left|[u_k(x)-u_{k+1}(x)]-[u_{k+1}(x)-u_{k+2}(x)]\right| \underset{\text{Q4 b)}}{\leq} x\,|u_k(x)-u_{k+1}(x)|$

Donc $\forall k\in\mathbb{N}$, $[u_k(x)-u_{k+1}(x)]-[u_{k+1}(x)-u_{k+2}(x)]\leq x\,|u_k(x)-u_{k+1}(x)| = x\,[u_k(x)-u_{k+1}(x)]$.

Par conséquent : $\forall k\in\mathbb{N}$, $(1-x)\,[u_k(x)-u_{k+1}(x)]\leq u_{k+1}(x)-u_{k+2}(x)$.

et donc : $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_k(x)-u_{k+1}(x)\leq\dfrac{u_{k+1}(x)-u_{k+2}(x)}{1-x}$.

Finalement : $\forall k\in\mathbb{N}$, $0\leq u_k(x)-u_{k+1}(x)\leq\dfrac{u_{k+1}(x)-u_{k+2}(x)}{1-x}$ et ceci pour tout $x\in[0,1[$.

Q5 a) $\forall t\in[0,1]$, $h'(t)=1-t\geq 0$. h est croissante sur $[0,1]$.

Soient $x\in[0,1[$ et $k\in\mathbb{N}$. $u_{k+1}(x)\leq u_k(x)$

$\forall t\in[u_{k+1}(x),u_k(x)]$, $0< h(u_{k+1}(x))\leq h(t)\leq h(u_k(x))$.

$\forall t\in[u_{k+1}(x),u_k(x)]$, $\dfrac{1}{h(u_k(x))}\leq\dfrac{1}{h(t)}\leq\dfrac{1}{h(u_{k+1}(x))}$. En intégrant entre $u_{k+1}(x)$ et $u_k(x)$

on obtient : $$\frac{u_k(x)-u_{k+1}(x)}{h(u_k(x))}\leq\int_{u_{k+1}(x)}^{u_k(x)}\frac{1}{h(t)}\,dt\leq\frac{u_k(x)-u_{k+1}(x)}{h(u_{k+1}(x))}.$$

$u_k(x)-u_{k+1}(x)=[1-1+x-\frac{x}{2}u_k(x)]u_k(x)=x\,(1-\frac{1}{2}u_k(x))\,u_k(x)=x\,h(u_k(x))$ et

$u_{k+1}(x)-u_{k+2}(x)=x\,h(u_{k+1}(x))$. Par conséquent :

$$x\leq\int_{u_{k+1}(x)}^{u_k(x)}\frac{1}{h(t)}\,dt\leq\frac{u_k(x)-u_{k+1}(x)}{\dfrac{u_{k+1}(x)-u_{k+2}(x)}{x}}=x\times\frac{u_k(x)-u_{k+1}(x)}{u_{k+1}(x)-u_{k+2}(x)}\overset{Q4c}{\leq}x\times\frac{1}{1-x}=\frac{x}{1-x}\ \ldots\text{cqfd}$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $x\in[0,1[$

$$\int_{u_n(x)}^{1}\frac{dt}{h(t)}=\int_{u_n(x)}^{u_{n-1}(x)}\frac{1}{h(t)}dt+\int_{u_{n-1}(x)}^{u_{n-2}(x)}\frac{1}{h(t)}dt+\dots+\int_{u_1(x)}^{u_0(x)}\frac{1}{h(t)}dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{u_{k+1}(x)}^{u_k(x)}\frac{dt}{h(t)}$$

$$nx=\sum_{k=0}^{n-1}x\leq\int_{u_n(x)}^{1}\frac{dt}{h(t)}=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{u_{k+1}(x)}^{u_k(x)}\frac{dt}{h(t)}\leq\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x}{1-x}=\frac{nx}{1-x}$$

$nx\leq\displaystyle\int_{u_n(x)}^{1}\frac{dt}{h(t)}\leq\frac{nx}{1-x}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$.

Q6 a) Soit $t\in[0,1[$. $$\frac{1}{h(t)}=\frac{1}{t(1-t/2)}=\frac{1-t/2+t/2}{t(1-t/2)}=\frac{1-t/2}{t(1-t/2)}+\frac{t/2}{t(1-t/2)}=\frac{1}{t}+\frac{1/2}{1-t/2}$$

$\forall t\in[0,1[$, $\dfrac{1}{h(t)}=\dfrac{1}{t}+\dfrac{1/2}{1-t/2}$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $x\in[0,1[$. $\displaystyle\int_{u_n(x)}^{1}\frac{dt}{h(t)}=\int_{u_n(x)}^{1}\left(\frac{1}{t}+\frac{1/2}{1-t/2}\right)dt=\Big[\ln|t|-\ln|1-t/2|\Big]_{u_n(x)}^{1}$

$$\int_{u_n(x)}^{1}\frac{dt}{h(t)}=\ln 1-\ln 1/2-\ln|u_n(x)|+\ln|1-u_n(x)/2|=\ln 2+\ln\left(1-\frac{u_n(x)}{2}\right)-\ln(u_n(x))$$

$nx\leq\ln\left[\dfrac{2\left(1-\frac{u_n(x)}{2}\right)}{u_n(x)}\right]\leq\dfrac{nx}{1-x}$; $e^{nx}\leq\dfrac{2-u_n(x)}{u_n(x)}=\dfrac{2}{u_n(x)}-1\leq e^{\frac{nx}{1-x}}$.

Par conséquent : $0< e^{nx}+1\leq\dfrac{2}{u_n(x)}\leq 1+e^{\frac{nx}{1-x}}$

donc : $\dfrac{2}{1+e^{\frac{nx}{1-x}}}\leq u_n(x)\leq\dfrac{2}{e^{nx}+1}$.

Q7 Soit $y \in \mathbb{R}_+$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{y}{n} = 0$. $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow \frac{y}{n} \in [0,1[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq p$.

$$\frac{2}{1+e^{\frac{n(y/n)}{1-y/n}}} \leq u_n\left(\frac{y}{n}\right) \leq \frac{2}{e^{n\frac{y}{n}}+1} \quad ; \quad \frac{2}{1+e^{\frac{y}{1-y/n}}} \leq u_n\left(\frac{y}{n}\right) \leq \frac{2}{e^{y}+1}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{1+e^{\frac{y}{1-y/n}}} = \frac{2}{1+e^y}$ donc par encadrement : $\left(u_n\left(\frac{y}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$ converge vers $\frac{2}{1+e^y}$.

Q8 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\quad \frac{\alpha}{n+\alpha} \in [0,1[$ et Q6 b

$$v_n\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) = \frac{\alpha}{n+\alpha} u_n\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) \geq \frac{\alpha}{n+\alpha} \; \frac{2}{1+e^{\frac{n\frac{\alpha}{n+\alpha}}{1-\frac{\alpha}{n+\alpha}}}} = \frac{\alpha}{n+\alpha} \times \frac{2}{1+e^{\alpha}} = \frac{2}{n+\alpha} \times \frac{\alpha}{1+e^{\alpha}}$$

$$v_n\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) \geq \frac{2}{n+\alpha} f(\alpha) = \frac{2(\alpha-1)}{n+\alpha}$$

Si $n=0$: $v_0\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) = 1 \times u_0\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) = 1 \geq \frac{2(\alpha-1)}{\alpha}$ $\quad \left(1 \geq \frac{2(\alpha-1)}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \leq 2\right)$

ou encore : $v_n\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) \geq \frac{2(\alpha-1)}{n+\alpha}$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) \geq \frac{2(\alpha-1)}{n+\alpha}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $M_n \geq v_n\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) \geq \frac{2(\alpha-1)}{n+\alpha}$. Montrons maintenant que : $M_n \leq \frac{2(\alpha-1)}{n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons donc que : $\forall x \in [0,1]$, $v_n(x) \leq \frac{2(\alpha-1)}{n}$.

$$\forall x \in [0,1[, \; v_n(x) = x\,u_n(x) \leq x \times \frac{2}{e^{nx}+1} \leq \frac{2}{n} \times \frac{nx}{e^{nx}+1} \underset{f(nx) \leq f(\alpha)}{\leq} \frac{2}{n} f(\alpha) = \frac{2(\alpha-1)}{n}$$

Donc $\forall x \in [0,1[$, $v_n(x) \leq \frac{2(\alpha-1)}{n}$

v_n étant continue en 1 : $v_n(1) = \lim\limits_{x\to 1} v_n(x) \leq \frac{2(\alpha-1)}{n}$

Finalement : $\forall x \in [0,1]$, $v_n(x) \leq \frac{2(\alpha-1)}{n}$ et par conséquent : $M_n \leq \frac{2(\alpha-1)}{n}$

Conclusion... $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2(\alpha-1)}{n+\alpha} \leq M_n \leq \frac{2(\alpha-1)}{n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2(\alpha-1) \times \frac{n}{n+\alpha} \leq n M_n \leq 2(\alpha-1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2(\alpha-1) \times \frac{n}{n+\alpha}\right] = 2(\alpha-1)$.

Par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}(n M_n) = 2(\alpha-1)$, ou encore : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{M_n}{\frac{2(\alpha-1)}{n}} = 1$

Donc $M_n \sim \frac{2(\alpha-1)}{n}$.