PARTIE I — Etude de $E(\sigma_2)$

Q1.. Montrons en fait que pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$, $E(\sigma_n)$ est un sous-espace vectoriel de E ce qui donnera une solution à cette question et à II Q1..

→ $E(\sigma_n)$ n'est pas vide car $E(\sigma_n)$ contient, par exemple, les fonctions affines sur $[a,b]$ (si f est affine sur $[a,b]$ la restriction de f à $[x_k, x_{k+1}]$ est affine pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$)

→ Soient f et g deux éléments de $E(\sigma_n)$ et λ un réel. Montrons que : $\lambda f + g \in E(\sigma_n)$
Notons f_k (resp. g_k) la restriction de f (resp. g) à $[x_k, x_{k+1}]$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$
Si $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda f_k + g_k$ est affine sur $[x_k, x_{k+1}]$, car f_k et g_k le sont sur ce même intervalle, et $\lambda f_k + g_k$ n'est autre que la restriction de $\lambda f + g$ à $[x_k, x_{k+1}]$
Par conséquent : pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de $\lambda f + g$ à $[x_k, x_{k+1}]$ est affine ; donc $\lambda f + g \in E(\sigma_n)$.
Ceci achève de prouver que $\underline{E(\sigma_n) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

Q2.. Soit $f \in E(\sigma_2)$. f est affine sur $[a,c]$, prend la valeur $f(a)$ en a et $f(c)$ en c !
Par conséquent : $\forall t \in [a,c],\ f(t) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}(t-a) + f(a) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}(t-c) + f(c)$

De même : $\forall t \in [c,b],\ f(t) = \dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}(t-b) + f(b) = \dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}(t-c) + f(c)$

Q3.. → Montrons que ϕ est linéaire.
Soient $(f,g) \in E(\sigma_2)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\phi(\lambda f + g) = (\lambda f(a) + g(a), \lambda f(c) + g(c), \lambda f(b) + g(b)) = \lambda(f(a), f(c), f(b)) + (g(a), g(c), g(b)) = \lambda\phi(f) + \phi(g)$

→ Montrons que ϕ est injective.
Soit $f \in \operatorname{Ker}\phi$. $\phi(f) = (0,0,0)$. $f(a) = f(b) = f(c) = 0$.
D'après Q2 : $\forall t \in [a,c],\ f(t) = \dfrac{0-0}{c-a}(t-a) + 0 = 0$ &
$\forall t \in [c,b],\ f(t) = \dfrac{0-0}{b-c}(t-b) + 0 = 0$
f est donc nulle sur $[a,b]$.
Finalement $\operatorname{Ker}\phi = \{0_{E(\sigma_2)}\}$; ϕ est injective.

→ Montrons que ϕ est surjective.
Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Construisons f, élément de $E(\sigma_2)$, tel que : $f(a) = \alpha$, $f(c) = \beta$ et $f(b) = \gamma$
Q2 ouvre clairement le chemin.
Posons $\forall t \in [a,c],\ f(t) = \dfrac{\beta-\alpha}{c-a}(t-a) + \alpha$ et $\forall t \in\ ]c,b],\ f(t) = \dfrac{\gamma-\beta}{b-c}(t-b) + \gamma$

Notons que : $f(a)=\frac{\beta-\alpha}{c-a}(a-a)+\alpha=\alpha$, $f(c)=\frac{\beta-\alpha}{c-a}(c-a)+\alpha=\beta-\alpha+\alpha=\beta$ et

$f(b)=\frac{\sigma-\beta}{b-c}(b-b)+\sigma=\sigma$

$\forall t\in[a,c]$, $f(t)=\frac{\beta-\alpha}{c-a}(t-a)+\alpha$ donc la restriction de f à $[a,c]$ est affine.

$\forall t\in\,]c,b]$, $f(t)=\frac{\sigma-\beta}{b-c}(t-b)+\sigma$ et $\frac{\sigma-\beta}{b-c}(c-b)+\sigma=-(\sigma-\beta)+\sigma=\beta=f(c)$ donc

$\forall t\in[c,b]$, $f(t)=\frac{\sigma-\beta}{b-c}(t-b)+\sigma$; la restriction de f à $[c,b]$ est affine.

Par conséquent : $f\in E(\sigma_2)$ et $\phi(f)=(f(a),f(c),f(b))=(\alpha,\beta,\sigma)$; f est un antécédent de (α,β,σ) par ϕ dans $E(\sigma_2)$.

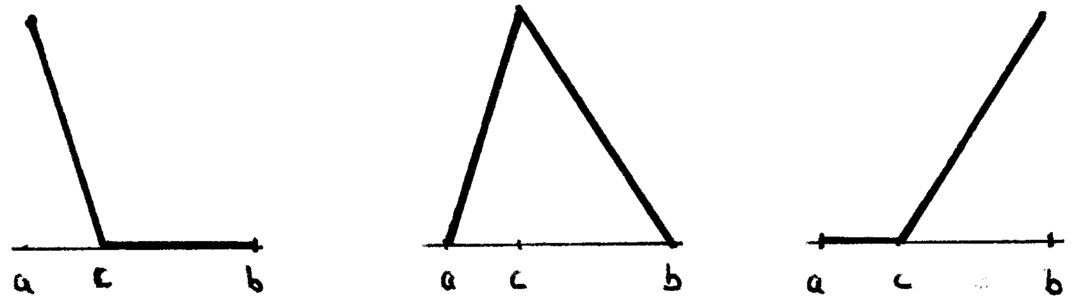
Finalement ϕ est surjective.

En conclusion ϕ est un isomorphisme de $E(\sigma_2)$ sur $\mathbb{R}^3$ car ϕ est linéaire et bijective.

$E(\sigma_2)$ et $\mathbb{R}^3$ étant isomorphes : $\dim E(\sigma_2)=\dim\mathbb{R}^3=3$.

$E(\sigma_2)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3.

Q4 .. a)



f_0 f_1 f_2

b) Montrons que (f_0,f_1,f_2) est une base de $E(\sigma_2)$.

V1.. ϕ^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $E(\sigma_2)$; ϕ^{-1} transforme donc la base canonique $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ en une base de $E(\sigma_2)$; par conséquent $(f_1,f_2,f_3)=(\phi^{-1}((1,0,0)),\phi^{-1}((0,1,0)),\phi^{-1}((0,0,1)))$ est une base de $E(\sigma_2)$.

V2.. $\dim(E(\sigma_2))=3$; pour montrer que (f_0,f_1,f_2) est une base de $E(\sigma_2)$ il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit $(\alpha,\beta,\sigma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha f_0+\beta f_1+\sigma f_2=0_{E(\sigma_2)}$.

$0=(\alpha f_0+\beta f_1+\sigma f_2)(a)=\alpha$

$0=(\alpha f_0+\beta f_1+\sigma f_2)(c)=\beta$

$0=(\alpha f_0+\beta f_1+\sigma f_2)(b)=\sigma$. Finalement $\alpha=\beta=\sigma=0$. Ceci achève de prouver que la famille (f_0,f_1,f_2) est libre.

Q5.. a) → Montrons pour commencer que g_0, g_1 et g_2 sont des éléments de $E(\sigma_2)$

$\forall t \in [a,c]$, $g_0(t) = t-a$, $g_1(t) = c-t$ et $g_2(t) = b-t$

$\forall t \in [c,b]$, $g_0(t) = t-a$, $g_1(t) = t-c$ et $g_2(t) = b-t$

g_0, g_1, g_2 étant affines sur $[a,c]$ et $[c,b]$, ce sont des éléments de $E(\sigma_2)$.

→ Montrons que (g_0, g_1, g_2) est une base de $E(\sigma_2)$; il suffit de montrer que cette famille est libre car $\dim E(\sigma_2) = 3$.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\alpha g_0 + \beta g_1 + \gamma g_2 = 0_{E(\sigma_2)}$; prouvons que : $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$0 = (\alpha g_0 + \beta g_1 + \gamma g_2)(a) = \beta(c-a) + \gamma(b-a)$; $\beta = -\frac{b-a}{c-a}\gamma$ $(c \neq a)$ (1)

$0 = (\alpha g_0 + \beta g_1 + \gamma g_2)(c) = \alpha(c-a) + \gamma(b-c)$; $\alpha = -\frac{b-c}{c-a}\gamma$ (2)

$0 = (\alpha g_0 + \beta g_1 + \gamma g_2)(b) = \alpha(b-a) + \beta(b-c)$; $0 = \left[-\frac{(b-c)}{c-a}(b-a) - \frac{b-a}{c-a}(b-c)\right]\gamma = -\frac{2(b-c)(b-a)}{c-a}\gamma$ (3)

$b \neq c$ et $b \neq a$ donc (3) donne $\gamma = 0$; (1) (resp. (2)) donne alors $\beta = 0$ (resp. $\alpha = 0$)

Finalement $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille (g_0, g_1, g_2) est bien libre ; c'est donc une base de $E(\sigma_2)$ (... car $\dim E(\sigma_2) = 3$)

Calculons les coordonnées de g_0, g_1 et g_2 sur la base $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2)$.

$\phi(g_0) = (g_0(a), g_0(c), g_0(b)) = (0, c-a, b-a) = (c-a)(0,1,0) + (b-a)(0,0,1) = (c-a)\,\phi(f_1) + (b-a)\,\phi(f_2)$

$\phi(g_0) = \phi\left((c-a)f_1 + (b-a)f_2\right)$; par injectivité : $\underline{\underline{g_0 = (c-a)f_1 + (b-a)f_2}}$.

Une "seconde" version pour les coordonnées de g_1.

Soit (α, β, γ) les coordonnées de g_1 dans la base (f_0, f_1, f_2).

$c-a = g_1(a) = (\alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2)(a) = \alpha$

$0 = g_1(c) = (\alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2)(c) = \beta$

$b-c = g_1(b) = (\alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2)(b) = \gamma$

Finalement : $\underline{\underline{g_1 = (c-a)f_0 + (b-c)f_2}}$.

De même : $\underline{\underline{g_2 = (b-a)f_0 + (b-c)f_1}}$

Remarque.. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2)$ à la base $\mathcal{B}' = (g_0, g_1, g_2)$. $P = \begin{bmatrix} 0 & c-a & b-a \\ c-a & 0 & b-c \\ b-a & b-c & 0 \end{bmatrix}$. Notons que P est inversible.

b) Soient $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $X'=\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX=X' \iff \begin{cases}\alpha y+\beta z = x'\\ \alpha x+\gamma z = y'\\ \beta x+\gamma y = z'\end{cases} \iff \begin{cases} y=\frac{1}{\alpha}x'-\frac{\beta}{\alpha}z\\ x=\frac{1}{\alpha}y'-\frac{\gamma}{\alpha}z\\ z'=\frac{\beta}{\alpha}y'-\frac{\beta\gamma}{\alpha}z+\frac{\gamma}{\alpha}x'-\frac{\gamma\beta}{\alpha}z=\frac{1}{\alpha}\left[\beta y'+\gamma x'-2\beta\gamma z\right]\end{cases}$$

$$AX=X' \iff \begin{cases} z=\frac{1}{2\beta\gamma}\left[\beta y'+\gamma x'-\alpha z'\right]=\frac{1}{2\beta\gamma}\left[\gamma x'+\beta y'-\alpha z'\right]\\ y=\frac{1}{\alpha}x'-\frac{1}{2\alpha\gamma}\left[\beta y'+\gamma x'-\alpha z'\right]=\frac{1}{2\alpha\gamma}\left[2\gamma x'-\beta y'-\gamma x'+\alpha z'\right]=\frac{1}{2\alpha\gamma}\left[\gamma x'-\beta y'+\alpha z'\right]\\ x=\frac{1}{\alpha}y'-\frac{1}{2\alpha\beta}\left[\beta y'+\gamma x'-\alpha z'\right]=\frac{1}{2\alpha\beta}\left[2\beta y'-\beta y'-\gamma x'+\alpha z'\right]=\frac{1}{2\alpha\beta}\left[-\gamma x'+\beta y'+\alpha z'\right]\end{cases}$$

Donc $\forall X'=\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \exists!\ X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX=X'$ $\left(X=\begin{bmatrix}\frac{1}{2\alpha\beta}(-\gamma x'+\beta y'+\alpha z')\\ \frac{1}{2\alpha\gamma}(\gamma x'-\beta y'+\alpha z')\\ \frac{1}{2\beta\gamma}(\gamma x'+\beta y'-\alpha z')\end{bmatrix}\right)$

Par conséquent A est inversible et $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{-\gamma}{2\alpha\beta} & \frac{\beta}{2\alpha\beta} & \frac{\alpha}{2\alpha\beta}\\ \frac{\gamma}{2\alpha\gamma} & -\frac{\beta}{2\alpha\gamma} & \frac{\alpha}{2\alpha\gamma}\\ \frac{\gamma}{2\beta\gamma} & \frac{\beta}{2\beta\gamma} & -\frac{\alpha}{2\beta\gamma}\end{bmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{2\alpha\beta\gamma}\begin{bmatrix}-\gamma^2 & \beta\gamma & \alpha\gamma\\ \gamma\beta & -\beta^2 & \alpha\beta\\ \gamma\alpha & \beta\alpha & -\alpha^2\end{bmatrix}$$

Remarques. 1. La résolution du système $AX=X'$ est plus aisée en posant $u=\alpha\beta x$, $v=\alpha\gamma y$ et $w=\gamma\beta z$.

$AX=X'$ équivaut alors à $\begin{cases}v+w=\gamma x'\\ u+w=\beta y'\\ u+v=\gamma z'\end{cases}$

$L_2+L_3-L_1$ donne $2u$, $L_1+L_3-L_2$ donne $2v$, $L_1+L_2-L_3$ donne $2w$

2. Un calcul simple donne $A^3=2\alpha\beta\gamma\, I_3+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)A$; donc

$A\left(\frac{1}{2\alpha\beta\gamma}\left(A^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)I_3\right)\right)=I_3$ ce qui redonne l'inversibilité de A

et indique que $A^{-1}=\frac{1}{2\alpha\beta\gamma}\left[A^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)I_3\right]$; on retrouve le résultat précédent car

$$A^2=\begin{bmatrix}\alpha^2+\beta^2 & \beta\gamma & \alpha\gamma\\ \gamma\beta & \alpha^2+\gamma^2 & \alpha\beta\\ \gamma\alpha & \beta\alpha & \beta^2+\gamma^2\end{bmatrix}$$

3. L'inversion par le pivot de Gauss fonctionne assez bien sur A.

c) Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}=(f_0,f_1,f_2)$ à $\mathcal{B}'=(g_0,g_1,g_2)$.

$$P=\begin{bmatrix} 0 & c-a & b-a \\ c-a & 0 & b-c \\ b-a & b-c & 0 \end{bmatrix}.$$ Posons $\alpha=c-a$, $\beta=b-a$ et $\gamma=b-c$.

$$P=\begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix}$$ et α,β,γ sont des réels non nuls.

Par conséquent P^{-1} est inversible (normal pour une matrice de passage) et

$$P^{-1}=\frac{1}{2\alpha\beta\gamma}\begin{bmatrix} -\gamma^2 & \beta\gamma & \alpha\gamma \\ \gamma\beta & -\beta^2 & \alpha\beta \\ \gamma\alpha & \beta\alpha & -\alpha^2 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\gamma/\alpha\beta & 1/\alpha & 1/\beta \\ 1/\alpha & -\beta/\alpha\gamma & 1/\gamma \\ 1/\beta & 1/\gamma & -\alpha/\beta\gamma \end{bmatrix}$$

Donc

$$f_0=\frac{1}{2}\left[-\frac{(b-c)}{(c-a)(b-a)}g_0+\frac{1}{c-a}g_1+\frac{1}{b-a}g_2\right]$$

$$f_1=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{c-a}g_0-\frac{(b-a)}{(c-a)(b-c)}g_1+\frac{1}{b-c}g_2\right]$$

$$f_2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}g_0+\frac{1}{b-c}g_1-\frac{(c-a)}{(b-a)(b-c)}g_2\right]$$

PARTIE II

On prend les mêmes, ou presque, et on recommence !

NB Je n'utiliserai $x_k=\frac{k}{n}$ que si nécessaire pour donner le plus de généralité possible aux résultats proposés.

Q1.. A été résolue au niveau de I. Q1 (... faire $a=0$ et $b=1$!)

Q2.. Même démonstration que dans I. Q3. Je vous laisse la linéarité et me colle à la bijectivité...

→ Injectivité de ϕ.

Soit $f\in\operatorname{Ker}\phi$; $\phi(f)=0_{\mathbb{R}^{n+1}}$; $f(x_0)=f(x_1)=\dots=f(x_{n+1})=0$.

Pour montrer que f est nulle sur $[0,1]$ il suffit de montrer que : f est nulle sur $[x_k,x_{k+1}]$ pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$.

Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$. f étant affine sur $[x_k,x_{k+1}]$:

$$\forall t\in[x_k,x_{k+1}],\ f(t)=\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}(t-x_k)+f(x_k)$$

Comme : $f(x_k)=f(x_{k+1})=0$: $\forall t\in[x_k,x_{k+1}]$, $f(t)=0$; c'est ce qu'il fallait montrer.

Finalement : $\operatorname{Ker}\phi=\{0_{E_n}\}$; ϕ est injective.

→ Surjectivité de ϕ.

Soit $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$. Construisons $f\in E_n$ telle que : $\phi(f)=(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)$; c'est à dire telle que : $f(x_0)=\alpha_0,\ f(x_1)=\alpha_1,\dots,f(x_n)=\alpha_n$.

Posons $\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \forall t\in[x_k,x_{k+1}],\ u_k(t)=\dfrac{\alpha_{k+1}-\alpha_k}{x_{k+1}-x_k}(t-x_k)+\alpha_k$.

Notons que si $k\in[\![0,n-1]\!]$: u_k est affine sur $[x_k,x_{k+1}]$, $u_k(x_k)=\alpha_k$ et $u_k(x_{k+1})=\alpha_{k+1}$.

Posons alors $\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \forall t\in[x_k,x_{k+1}[,\ f(t)=u_k(t)$ et $f(x_n)=\alpha_n=u_{n-1}(x_n)$

On a ainsi défini une application de $[x_0,x_n]=[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$. $\forall t\in[x_k,x_{k+1}[,\ f(t)=u_k(t)$; or $f(x_{k+1})=u_{k+1}(x_{k+1})=\alpha_{k+1}=u_k(x_{k+1})$

↖ à un abus près ... on fait on sautera la 1ère égalité pour $k=n-1$.

Donc $\forall t\in[x_k,x_{k+1}],\ f(t)=u_k(t)$.

Par conséquent pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, f est affine sur $[x_k,x_{k+1}]$

Résumons : – $f\in E_n$

– $(f(x_0),f(x_1),\dots,f(x_n))=(u_0(x_0),u_1(x_1),\dots,u_{n-1}(x_{n-1}),u_{n-1}(x_n))=(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},\alpha_n)$

Donc $f\in E_n$ et $\phi(f)=(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)$; f est un antécédent de $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ par ϕ dans E_n.

Finalement ϕ est surjective.

En conclusion ϕ est un isomorphisme de E_n sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dès lors $\underline{\underline{\dim E_n=\dim\mathbb{R}^{n+1}=n+1}}$.

Q3 a) $\dim E_n=n+1$ et $(f_0,f_1,\dots,f_n)$ est une famille de $n+1$ éléments de E_n.
Pour montrer que cette famille est une base de E_n il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soit $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i f_i=0_{E_n}$

$\forall k\in[\![0,n]\!],\quad 0=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i f_i(x_k)=\alpha_k f_k(x_k)=\alpha_k$.

$\forall k\in[\![0,n]\!],\ \alpha_k=0$. C'est ce qu'il fallait montrer.

Remarque.. Soit $(u_0,u_1,\dots,u_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ ($u_i=(t_0,t_1,\dots,t_n)$ avec $t_k=0$ si $k\neq i$ et $t_k=1$ si $k=i$ ...). ϕ^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ sur E_n.
Par conséquent : $(f_0,f_1,\dots,f_n)=(\phi^{-1}(u_0),\phi^{-1}(u_1),\dots,\phi^{-1}(u_n))$ est une base de E_n

b) Soit $g \in E_n$. Notons $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ les coordonnées de g dans la base $\mathcal{B} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$.

$\forall i \in [\![0,n]\!]$, $g(x_i) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f_k(x_i) = \alpha_i f_i(x_i) = \alpha_i$

Donc $g = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f_k = \sum_{k=0}^{n} g(x_k) f_k$.

$$\underline{\underline{g = \sum_{k=0}^{n} g(x_k) f_k}}$$

Q4 a) Fixons k dans $[\![0,n]\!]$. $\forall t \in [0,1]$, $g_k(t) = |t - x_k|$.

Donc $\forall t \in [0, x_k]$, $g_k(t) = x_k - t$ et $\forall t \in [x_k, 1]$, $g_k(t) = t - x_k$

Par conséquent : $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, $\forall t \in [x_i, x_{i+1}]$, $g_k(t) = x_k - t$ et

$\forall i \in [\![k, n-1]\!]$, $\forall t \in [x_i, x_{i+1}]$, $g_k(t) = t - x_k$

Pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, la restriction de g_k à $[x_i, x_{i+1}]$ est affine.

Donc $g_k \in E_n$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$

b) $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $g = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k g_k$

Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$. Supposons $\lambda_j \neq 0$.

$\forall t \in [x_{j-1}, x_j]$, $g(t) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k g_k(t) = \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_k (t - x_k) + \sum_{k=j}^{n} \lambda_k (x_k - t)$

g est dérivable sur $[x_{j-1}, x_j]$; en particulier g est dérivable à gauche en x_j et

$g'_g(x_j) = \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_k - \sum_{k=j}^{n} \lambda_k$

$\forall t \in [x_j, x_{j+1}]$, $g(t) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k g_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k |t - x_k| = \sum_{k=0}^{j} \lambda_k (t - x_k) + \sum_{k=j+1}^{n} \lambda_k (x_k - t)$

g est dérivable sur $[x_j, x_{j+1}]$; en particulier g est dérivable à droite en x_j et

$g'_d(x_j) = \sum_{k=0}^{j} \lambda_k - \sum_{k=j+1}^{n} \lambda_k$.

$g'_g(x_j) - g'_d(x_j) = \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_k - \sum_{k=j}^{n} \lambda_k - \sum_{k=0}^{j} \lambda_k + \sum_{k=j+1}^{n} \lambda_k = -2\lambda_j \neq 0$.

$g'_g(x_j) \neq g'_d(x_j)$; g n'est pas dérivable en x_j.

Q5 a) Soit $(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $\sum_{k=0}^{n}\lambda_k g_k = 0_{E_n}$. Montrons que : $\lambda_0=\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$

0_{E_n} est dérivable sur $[0,1]$ donc $\sum_{k=0}^{n}\lambda_k g_k$ aussi !

En particulier si $j\in[\![1,n-1]\!]$, $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k g_k$ est dérivable en x_j ce qui exige

d'après Q4 b $\lambda_j=0$. Ne reste plus qu'à montrer que : $\lambda_0=\lambda_n=0$.

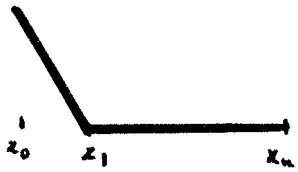
$0_{E_n}=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k g_k = \lambda_0 g_0+\lambda_n g_n$. En particulier :

$(\lambda_0 g_0+\lambda_n g_n)(x_0)=(\lambda_0 g_0+\lambda_n g_n)(x_n)=0$, donc $\lambda_n|x_0-x_n|=\lambda_0|x_n-x_0|=0$ ce qui

donne $\lambda_0=\lambda_n=0$ car $x_0\neq x_n$. Ceci achève de montrer que la famille $(g_0,g_1,\dots,g_n)$ est libre.

$\dim E_n=n+1$ et $(g_0,g_1,\dots,g_n)$ est une famille libre de E_n ayant $n+1$ éléments :

<u>$(g_0,g_1,\dots,g_n)$ est donc une base de E_n.</u>



b) → <u>Etude de f_0</u> :

Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$. f_0 est affine sur $[x_k,x_{k+1}]$ et $f_0(x_k)=f_0(x_{k+1})=0$.

f_0 est donc nulle sur $[x_k,x_{k+1}]$ pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$.

f_0 est donc nulle sur $[x_1,x_n]$

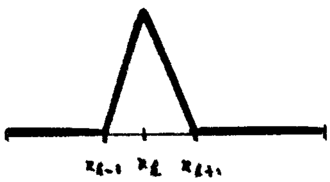
f_0 sera donc dérivable en $x_2,x_3,\dots,x_{n-1}$

Soit $(t_0,t_1,\dots,t_n)$ les coordonnées de f_0 sur la base $\mathcal{B}'=(g_0,g_1,\dots,g_n)$.

$f_0=\sum_{k=0}^{n}t_k g_k$ et f_0 est dérivable en $x_2,x_3,\dots,x_{n-1}$, donc $t_2=t_3=\dots=t_{n-1}=0$

Finalement $f_0=t_0g_0+t_1g_1+t_ng_n$. En posant $\lambda_0=t_0$, $\gamma_0=t_1$ et $r_0=t_n$ on obtient

<u>$f_0=\lambda_0 g_0+\gamma_0 g_1+r_0 g_n$.</u>



→ <u>Etude de f_k.</u>

⚠ ← Attention bouse de mammouth.

Oh, le concepteur, peux tu nous expliquer ce que devient ta remarquable indication dans le cas où $k=1$ (resp. $k=n-1$) !

Si $k=1$, $\lambda_k=\alpha_k=0$?! Si $k=n-1$, $r_k=\beta_k=0$?!

Essayons de poursuivre en recollant les morceaux...

Soit $(u_0,u_1,\dots,u_n)$ les coordonnées de f_k dans la base $\mathcal{B}'=(g_0,g_1,\dots,g_n)$.

* $k \geqslant 2$. Soit $i \in [\![0, k-2]\!]$. f_k est affine sur $[x_i, x_{i+1}]$ et $f_k(x_i) = f_k(x_{i+1}) = 0$;

f_k est donc nulle sur $[x_0, x_{k-1}]$

En particulier f_k est dérivable en tout point de l'ensemble (éventuellement vide !) $\{x_1, x_2, \dots, x_{k-2}\}$

Par conséquent si $i \in [\![1, k-2]\!]$, $u_i = 0$

* $k \leqslant n-2$. Soit $i \in [\![k+1, n-1]\!]$. f_k est affine sur $[x_i, x_{i+1}]$ et $f_k(x_i) = f_k(x_{i+1}) = 0$

f_k est donc nulle sur $[x_{k+1}, x_n]$

En particulier f_k est dérivable en tout point de l'ensemble $\{x_{k+2}, \dots, x_{n-1}\}$

Par conséquent si $i \in [\![k+2, n-1]\!]$, $u_i = 0$

Ce qui précède montre alors que

→ pour $k = 1$: $f_k = u_0 g_0 + u_1 g_1 + u_2 g_2 + u_n g_n = u_{k-1} g_{k-1} + u_k g_k + u_{k+1} g_{k+1} + u_n g_n$.

→ pour $k \in [\![2, n-2]\!]$: $f_k = u_0 g_0 + u_{k-1} g_{k-1} + u_k g_k + u_{k+1} g_{k+1} + u_n g_n$.

→ pour $k = n-1$: $f_k = u_0 g_0 + u_{n-2} g_{n-2} + u_{n-1} g_{n-1} + u_n g_n = u_0 g_0 + u_{k-1} g_{k-1} + u_k g_k + u_{k+1} g_{k+1}$

Ne reste donc plus qu'à montrer que : $u_n = 0$ pour $k \in [\![1, n-2]\!]$ et $u_0 = 0$ pour $k \in [\![2, n-1]\!]$.

1er cas.. $\underline{k \geqslant 2}$. f_k est nulle sur $[x_0, x_1]$. Pour des commodités d'écriture revenons à $f_k = \sum_{i=0}^{n} u_i g_i$

$\underline{\underline{\forall t \in [x_0, x_1]}}$, $0 = f_k(t) = \sum_{i=0}^{n} u_i |t - x_i| = u_0(t - x_0) + \sum_{i=1}^{n} u_i (x_i - t)$

Par conséquent $u_0 - \sum_{i=1}^{n} u_i = -u_0 x_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i x_i = 0$ (polynôme de degré $\leqslant 1$ ayant une infinité de 0). Donc $\sum_{i=1}^{n} u_i = u_0$ et $\sum_{i=1}^{n} u_i x_i = u_0 x_0$

De plus $f_k(x_n) = 0$ car $k \leqslant n-1$

Donc $0 = \sum_{i=0}^{n} u_i g_i(x_n) = \sum_{i=0}^{n} u_i (x_n - x_i) = x_n \sum_{i=0}^{n} u_i - \sum_{i=0}^{n} u_i x_i$

D'après ce qui précède $0 = x_n(u_0 + u_0) - (u_0 x_0 + u_0 x_0)$

D'où : $2u_0 x_n = 2u_0 x_0$; ceci donne $u_0 = 0$ car $x_n \neq x_0$.

2ème cas.. $k \leqslant n-2$. Soit à montrer que $u_n = 0$.

Notons que f_k est nulle sur $[x_{n-1}, x_n]$ et en x_0.

Par conséquent : $\forall t \in [x_{n-1}, x_n]$, $0 = f_k(t) = \sum_{i=0}^{n} u_i |t-x_i| = \sum_{i=0}^{n-1} u_i (t-x_i) + u_n (x_n - t)$

Par identification : $0 = \sum_{i=0}^{n-1} u_i - u_n$ et $0 = -\sum_{i=0}^{n-1} u_i x_i + u_n x_n$; $\sum_{i=0}^{n-1} u_i = u_n$ et $\sum_{i=0}^{n-1} u_i x_i = u_n x_n$

$0 = f_k(x_0) = \sum_{i=0}^{n} a_i |x_0 - x_i| = \sum_{i=0}^{n} u_i x_i - \sum_{i=0}^{n} a_i x_0 = \sum_{i=0}^{n-1} u_i x_i + u_n x_n - x_0 \sum_{i=0}^{n-1} u_i - u_n x_0$

Donc $0 = u_n x_n + u_n x_n - x_0 u_n - u_n x_0 = 2u_n (x_n - x_0)$; $u_n = 0$ car $x_n \neq x_0$.

En conséquence nous avons donc prouvé que : $u_i = 0$ si $i \notin \{k-1, k, k+1\}$
Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, f_k est combinaison linéaire de g_{k-1}, g_k, g_{k+1}

Donc $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\exists (\lambda_k, \mu_k, \nu_k) \in \mathbb{R}^3$, $f_k = \lambda_k g_{k-1} + \mu_k g_k + \nu_k g_{k+1}$

→ Etude de f_n. Je vous le laisse ; voir en fait f_0.

On montre "comme pour f_0" que $\exists (\lambda_n, \mu_n, \nu_n)$, $f_n = \lambda_n g_0 + \mu_n g_{n-1} + \nu_n g_n$.

c) → Pour f_0 :

Il suffit d'appliquer le II Q5c à $a = x_0$, $b = x_n$ et $c = x_1$

$((g_0, g_1, g_n)$ jouant le rôle de (g_0, g_1, g_2) !!)

On obtient alors : $f_0 = \frac{1}{2}\left[-\frac{(x_n - x_1)}{(x_1 - x_0)(x_n - x_0)} g_0 + \frac{1}{x_1 - x_0} g_1 + \frac{1}{x_n - x_0} g_n\right]$

$x_0 = 0$, $x_n = 1$, $x_1 = \frac{1}{n}$, donc $\underline{\underline{f_0 = \frac{1}{2}\left[-(n-1) g_0 + n g_1 + g_n\right]}}$

→ Pour f_k avec $k \in [\![1, n-1]\!]$

On applique le II Q5c à $a = x_{k-1}$, $b = x_{k+1}$, $c = x_k$
(g_{k-1}, g_k, g_{k+1}) joue le rôle de (g_0, g_1, g_2)
f_k joue le rôle de f_2.

$$f_k = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x_k - x_{k-1}} g_{k-1} - \frac{(x_{k+1} - x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)} g_k + \frac{1}{x_{k+1} - x_k} g_{k+1}\right]$$

$\underline{\underline{f_k = \frac{1}{2}\left[n g_{k-1} - 2n g_k + n g_{k+1}\right]}}$

→ De même $\underline{\underline{f_n = \frac{1}{2}\left[g_0 + n g_{n-1} - (n-1) g_n\right]}}$

$a = x_0$, $b = x_n$, $c = x_{n-1}$
$f_2 \mapsto f_n$
$(g_0, g_1, g_2) \mapsto (g_0, g_{n-1}, g_n)$

Remarque .. Hormis les formules de Q5 c tout ce qui précède vaut pour une subdivision $\sigma_n = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ quelconque d'un intervalle $[a,b]$ quelconque.

Q6 .. Application .. Tu parles !

a) Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

$$g_k = \sum_{i=0}^{n} g_k(x_i) f_i = \sum_{i=0}^{n} |x_i - x_k| f_i = \sum_{i=0}^{n} \left|\frac{i-k}{n}\right| f_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n}|i-k| f_i$$

Les coordonnées de g_k dans $\mathcal{B} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ sont donc : $\left(\frac{k}{n}, \frac{k-1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-k}{n}\right)$

Notons $\hat{P}_n$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$$\hat{P}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1/n & \dots & (n-1)/n & n/n \\ 1/n & 0 & \dots & (n-2)/n & (n-1)/n \\ 2/n & 1/n & \dots & (n-3)/n & (n-2)/n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (n-2)/n & (n-3)/n & \dots & 1/n & 2/n \\ (n-1)/n & (n-2)/n & \dots & 0 & 1/n \\ n/n & (n-1)/n & \dots & 1/n & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{n} A_n = P_n \ !$$

P_n est donc la matrice de passage de $\mathcal{B} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ à $\mathcal{B}' = (g_0, g_1, \dots, g_n)$

P_n étant inversible $A_n = n P_n$ aussi.

$A_n^{-1} = \frac{1}{n} P_n^{-1}$. P_n^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}' = (g_0, g_1, \dots, g_n)$ à $\mathcal{B} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$.

D'après Q5 c)
$$P_n^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(n-1) & n & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ n & 2n & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & \ddots & n & 0 \\ 0 & & & n & 2n & n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & n & -(n-1) \end{bmatrix}$$

Par conséquent :

$$A_n^{-1} = \frac{1}{2n} \begin{bmatrix} -(n-1) & n & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ n & 2n & \ddots & & & 0 \\ 0 & n & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & \ddots & n & 0 \\ 0 & & & & 2n & n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & n & -(n-1) \end{bmatrix}$$

Q1 a) Notons u (resp. v) la restriction de φ à $[a,c]$ (resp. $[c,b]$).

u (resp. v) est affine sur $[a,c]$ (resp. $[c,b]$) donc de classe C^1 sur cet intervalle.

$u(a)=\varphi(a)=0$ et $\forall t\in[a,c]$, $u'(t)=u'(a)=\varphi'(a)$ (u' est constante sur $[a,c]$).

de même $v(b)=\varphi(b)=0$ et $\forall t\in[c,b]$, $v'(t)=v'(b)=\varphi'(b)$.

$$\int_a^c u(t)f''(t)dt=[u(t)f'(t)]_a^c-\int_a^c u'(t)f'(t)dt=u(c)f'(c)-u(a)f'(a)-\varphi'(a)\int_a^c f'(t)dt$$

Donc $\int_a^c \varphi(t)f''(t)dt=\int_a^c u(t)f''(t)dt=u(c)f'(c)-0-\varphi'(a)(f(c)-f(a))=u(c)f'(c)-\varphi'(a)(f(c)-f(a))$.

$$\int_c^b v(t)f''(t)dt=[v(t)f'(t)]_c^b-\int_c^b v'(t)f'(t)dt=\underbrace{v(b)f'(b)}_{=0}-v(c)f'(c)-\varphi'(b)\int_c^b f'(t)dt$$

$$\int_c^b \varphi(t)f''(t)dt=\int_c^b v(t)f''(t)dt=-v(c)f'(c)-\varphi'(b)(f(b)-f(c))$$

Donc $\int_a^b \varphi(t)f''(t)dt = f'(c)(u(c)-v(c))-\varphi'(a)(f(c)-f(a))-\varphi'(b)(f(b)-f(c))$

Mais $u(c)=\varphi(c)=v(c)$! Donc : $\int_a^b \varphi(t)f''(t)dt=-\varphi'(a)f(c)+\varphi'(a)f(a)-\varphi'(b)f(b)+\varphi'(b)f(c)$.

Soit encore : $\int_a^b \varphi(t)f''(t)dt= f(c)(\varphi'(b)-\varphi'(a))+\varphi'(a)f(a)-\varphi'(b)f(b)$

$= f(c)(\varphi'(b)-\varphi'(a))+f(a)(\varphi'(a)-\varphi'(b))$ car $f(a)=f(b)$

$=(f(c)-f(a))(\varphi'(b)-\varphi'(a))$.

Finalement : $\int_a^b \varphi(t)f''(t)dt = (f(c)-f(a))(\varphi'(b)-\varphi'(a))$.

b) Il suffit d'après ce qui précède de trouver $\varphi_c\in E(\sigma_2)$ telle que : $\varphi'(b)-\varphi'(a)=1$

Posons $\forall t\in[a,c]$, $u(t)=\alpha(t-a)$ et $\forall t\in[c,b]$, $v(t)=\beta(t-b)$

Notons que : $u(a)=v(b)=0$. Notons encore que : $u(c)=\alpha(c-a)$, $v(c)=\beta(c-b)$, et

$v'(b)-u'(a)=\beta-\alpha$. Ne reste plus qu'à trouver α et β tels que : $\alpha(c-a)=\beta(c-b)$ et

$\beta-\alpha=1$.

$$\begin{cases}\alpha(c-a)=\beta(c-b)\\ \text{et}\\ \beta-\alpha=1\end{cases}\iff\begin{cases}\beta=\alpha+1\\ \text{et}\\ \alpha(c-a)=(\alpha+1)(c-b)\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha=\dfrac{c-b}{b-a}\\ \beta=\dfrac{c-a}{b-a}\end{cases}.$$

Posons maintenant :

$\forall t \in [a,c]$, $\varphi_c(t) = \frac{c-b}{b-a}(t-a)$ et $\forall t \in]c,b]$, $\varphi_c(t) = \frac{c-a}{b-a}(t-b)$

Notons qu'en fait : $\forall t \in [c, b]$, $\varphi_c(t) = \frac{c-a}{b-a}(t-b)$.

Par conséquent : $\varphi_c \in E(\sigma_2)$

$\varphi_c(a) = 0$, $\varphi_c(b) = 0$. $\varphi_c'(b) - \varphi_c'(a) = \frac{c-a}{b-a} - \frac{c-b}{b-a} = 1$

En conséquence si f est une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$ alors $\int_a^b \varphi_c(t) f''(t)\,dt = f(c) - f(a)$.