PARTIE I	Etude d'une intégrale impropre ... c'est du cours.

Q1.. **Version 1..** On étudie la fonction $\varphi : t \mapsto \sin t - \frac{2t}{\pi}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$; c'est sans saveur !

Version 2.. Appelons φ la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$

φ est deux fois dérivable et $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi''(t) = -\sin t \leqslant 0$.

φ est donc concave ; sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est donc au-dessus du segment $[AB]$ où A et B sont les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$. $y = \frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-0}(x-0)+0 = \frac{2}{\pi}x$ est une équation de la droite (AB) car A a pour coordonnées $(0,0)$ et B a pour coordonnées $(\frac{\pi}{2}, 1)$.

$\mathcal{C}$ au-dessus de $[AB]$ donne : $\underline{\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t}$ ... cqfd.

Q2.. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_{\pi/2}^{x} \ln \frac{2t}{\pi}\, dt = \left[t \ln \frac{2t}{\pi} \right]_{\pi/2}^{x} - \int_{\pi/2}^{x} t \times \frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{2t}{\pi}}\, dt = x \ln \frac{2x}{\pi} - \int_{\pi/2}^{x} dt$

$\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \ln \frac{2t}{\pi} \end{cases}$

$H_1 : x \mapsto x \ln \frac{2x}{\pi} - (x - \frac{\pi}{2})$ est donc la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $h : x \mapsto \ln \frac{2x}{\pi}$ qui prend la valeur 0 en $\frac{\pi}{2}$.

$\underline{H_0 : x \mapsto x \ln \frac{2x}{\pi} - x \text{ est encore une primitive de } h \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

$\underline{\{H_0 + \lambda \,;\, \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ est l'ensemble des primitives de } h \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$

Rappelons que : $t \mapsto \ln \frac{2t}{\pi}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ donc localement intégrable.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $-\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\pi/2} h(t)\,dt = -H_1(\pi/2) + H_1(\varepsilon) = H_1(\varepsilon) = \left[\varepsilon \ln \frac{2\varepsilon}{\pi} - (\varepsilon - \frac{\pi}{2}) \right]$

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \left[\varepsilon \ln \frac{2\varepsilon}{\pi} - (\varepsilon - \frac{\pi}{2}) \right] = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \left[\varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon \ln \frac{2}{\pi} - \varepsilon + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{2}$

Donc $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} -\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln \frac{2t}{\pi}\, dt = \frac{\pi}{2}$ ceci prouve que : $\underline{-\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \ln \frac{2t}{\pi}\, dt \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{2}}$.

Q3. • **Remarques** 1.. On peut obtenir la convergence de I à partir de la convergence de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln t\, dt$ en écrivant : $\ln(\sin t) = \ln(\frac{\sin t}{t}) + \ln t$ ($t \mapsto \ln \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0). La méthode proposée est donc bien lourde...

2.. Il est déconseillé d'utiliser (après l'avoir montré...) $\ln(\sin t) \underset{0}{\sim} \ln t$ pour obtenir la convergence de I vu le programme de la classe ... •

$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{x} \ln(\sin t)\,dt$. f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = \ln(\sin x) \leqslant 0$

$\underline{f \text{ est donc décroissante sur }]0, \frac{\pi}{2}]}$.

$\forall t\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $\ln(\sin t)\geq \ln(\frac{2t}{\pi})$; $\forall t\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $-\ln(\sin t)\leq -\ln(\frac{2t}{\pi})$

$\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $f(x)\leq \int_x^{\pi/2} -\ln(\frac{2t}{\pi})dt = -\int_x^{\pi/2}\ln(\frac{2t}{\pi})dt = -\int_0^{\pi/2}\ln(\frac{2t}{\pi})dt + \int_0^x \ln(\frac{2t}{\pi})dt$

Or $\forall t\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $\ln(\frac{2t}{\pi})\leq 0$ donc $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $\int_0^x \ln(\frac{2t}{\pi})dt\leq 0$

Finalement : $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $f(x)\leq -\int_0^{\pi/2}\ln(2t/\pi)\,dt = \frac{\pi}{2}$

f est décroissante sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et majorée par $\frac{\pi}{2}$. f admet donc une limite finie en 0

Ceci signifie que $L=-\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,dt$ converge (et vaut $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$). { Théorème de la limite monotone

Q4 a) Soit $\varepsilon\in[\frac{\pi}{2},\pi[$. Montrons que J existe et vaut L

$$-\int_{\pi/2}^{\varepsilon}\ln(\sin t)\,dt \underset{u=\pi-t}{=} -\int_{\pi/2}^{\pi-\varepsilon}\ln(\sin(\pi-u))(-du) \underset{\sin(\pi-u)=\sin u}{=} -\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi/2}\ln(\sin u)\,du = f(\pi-\varepsilon)$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to\pi^-}(\pi-\varepsilon)=0^+$; $\lim\limits_{\varepsilon\to\pi^-} f(\pi-\varepsilon)=L$; donc $J=-\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin t)\,dt$ existe et vaut L.

Montrons que K existe et vaut L

Soit $\varepsilon\in[0,\pi/2[$

$$-\int_0^{\varepsilon}\ln(\cos t)\,dt \underset{u=\frac{\pi}{2}-t}{=} -\int_{\pi/2}^{\pi/2-\varepsilon}\ln(\cos(\tfrac{\pi}{2}-u))(-du) \underset{\cos(\frac{\pi}{2}-u)=\sin u}{=} -\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2}\ln(\sin u)\,du = f(\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon)$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to\frac{\pi}{2}^-}(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)=0^+$, $\lim\limits_{\varepsilon\to\frac{\pi}{2}^-} f(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)=L$; donc $K=-\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,dt$ existe et vaut L

En clair : $J=K=L$.

b) $K+L=-\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,dt-\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,dt = -\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t\sin t)\,dt = -\int_0^{\pi/2}\ln(\frac{\sin 2t}{2})\,dt$

$K+L=-\int_0^{\pi/2}(\ln(\sin 2t)+\ln\frac{1}{2})\,dt = -\int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2t)\,dt + \int_0^{\pi/2}(-\ln\frac{1}{2})\,dt = -\int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2t)\,dt + \frac{\pi}{2}\ln 2$

Or $-\int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2t)\,dt \underset{u=2t\ldots \text{ et sans } \varepsilon\,!!}{=} -\int_0^{\pi}\ln(\sin u)\,\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\left[-\int_0^{\pi/2}\ln(\sin u)\,du - \int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin u)\,du\right] = \frac{1}{2}[L+J]$

Par conséquent : $K+L=\frac{1}{2}(L+J)+\frac{\pi}{2}\ln 2$

c) a) et b) donnent alors : $J=K=L=\frac{\pi}{2}\ln 2$

PARTIE II Etude de la fonction W

• Remarque.. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $t \mapsto (\sin t)^x$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et prolongeable par continuité en 0

$W(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x t \, dt$ et est donc au mieux une intégrale généralisée convergente

au pire l'intégrale d'une fonction continue contenant un abus d'écriture... •

Q1.. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que : $x \leq y$. $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin t \leq 1$

donc $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $(\sin t)^y \leq (\sin t)^x$; en intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ on obtient

alors : $W(y) \leq W(x)$. Ceci amène <u>la décroissance de W sur $\mathbb{R}_+$</u>.

Q2.. a) Soit $a \in \mathbb{R}^+$ $u : t \mapsto e^{-at}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. L'inégalité des accroissements finis

montre alors que : $|e^{-ax} - e^{-ax_0}| \leq \max_{t \in [x, x_0]} |u'(t)| \, |x - x_0| = \max_{t \in [x, x_0]} (a e^{-at}) |x - x_0|$

$$|e^{-ax} - e^{-ax_0}| \leq a \max_{t \in [x,x_0]} (e^{-at}) |x - x_0| \underset{x \geq 0,\, x_0 \geq 0,\, a \geq 0}{\leq} a|x - x_0|$$

Finalement : <u>$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|e^{-ax} - e^{-ax_0}| \leq a|x - x_0|$.</u>

b) $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $-\ln(\sin t) \geq 0$,

donc $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $|e^{-[-\ln(\sin t)]x} - e^{-[-\ln(\sin t)]x_0}| \leq -\ln(\sin t) \, |x - x_0|$

Puis en intégrant : $\int_0^{\pi/2} |e^{-\ln(\sin t)^x} - e^{\ln(\sin t)^{x_0}}| \, dt \leq |x - x_0| \, L = |x - x_0| \frac{\pi}{2} \ln 2$

ou : $\int_0^{\pi/2} |(\sin t)^x - (\sin t)^{x_0}| \, dt \leq \frac{\pi \ln 2}{2} |x - x_0|$

donc $|W(x) - W(x_0)| = \left|\int_0^{\pi/2} [(\sin t)^x - (\sin t)^{x_0}] \, dt\right| \leq \int_0^{\pi/2} |(\sin t)^x - (\sin t)^{x_0}| \, dt \leq \frac{\pi \ln 2}{2} |x - x_0|$.

Par conséquent : <u>$|W(x) - W(x_0)| \leq \frac{\pi \ln 2}{2} |x - x_0|$. pour tout $(x, x_0) \in \mathbb{R}^{+2}$</u>

c) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|W(x) - W(x_0)| \leq \frac{\pi \ln 2}{2} |x - x_0|$.

Le théorème d'encadrement donne alors : $\lim_{x \to x_0} (W(x) - W(x_0)) = 0$ ou $\lim_{x \to x_0} W(x) = W(x_0)$.

Ceci amène la continuité de W en x_0 et ceci pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^+$. <u>W est continue sur $\mathbb{R}^+$</u>

Normal pour une fonction Lipschitzienne.

Q3.- Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ (!!!)

$$\int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^{x+2} dt = \int_\varepsilon^{\pi/2} \underbrace{\sin t}_{u'} \underbrace{(\sin t)^{x+1}}_{v} dt = \left[-\cos t (\sin t)^{x+1}\right]_\varepsilon^{\pi/2} - \int_\varepsilon^{\pi/2} (-\cos t)(x+1)(\cos t)(\sin t)^x dt$$

$$\int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^{x+2} dt = \cos\varepsilon (\sin\varepsilon)^{x+1} + (x+1)\int_\varepsilon^{\pi/2} (1-\sin^2 t)(\sin t)^x dt$$

$$\int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^{x+2} dt = \cos\varepsilon(\sin\varepsilon)^{x+1} + (x+1)\int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^x dt - (x+1)\int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^{x+2} dt$$

En faisant tendre ε vers 0 on obtient : $W(x+2) = 0 + (x+1)W(x) - (x+1)W(x+2)$

Par conséquent : $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad W(x+2) = \dfrac{x+1}{x+2} W(x).}}$

Q4 a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $g(x+1) = (x+2)\, W(x+2) W(x+1) = (x+1) W(x)\, W(x+1) = g(x)$. g est donc périodique de période 1.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(n+1) = g(n)$. La suite $(g(n))_{n\geq 0}$ est constante.

Or $g(0) = W(1)W(0) = \int_0^{\pi/2} \sin t\, dt \times \int_0^{\pi/2} dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Donc $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \ g(n) = \frac{\pi}{2}}}$. $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)\, W(n+1) W(n) = \frac{\pi}{2}}}$ au comme.

b) $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\dfrac{g(x)}{x+1} = W(x+1) W(x)$. Il s'agit donc de prouver que :

$\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $W(n+2)W(n+1) \leq W(x+n+1) W(x+n) \leq W(n+1) W(n)$.

Soit $x \in [0,1]$ et soit $n \in \mathbb{N}$. $n+2 \geq x+n+1 \geq n+1$ et $n+1 \geq x+n \geq n$

Par décroissance de W il vient : $0 \leq W(n+2) \leq W(x+n+1) \leq W(n+1)$

$0 \leq W(n+1) \leq W(x+n) \leq W(n)$ $\qquad (\forall z \in \mathbb{R}_+, W(z) \geq 0)$

Par produit (d'inégalités "positives") il vient : $W(n+2)\, W(n+1) \leq W(x+n+1) W(x+n) \leq W(n+1) W(n)$

Par conséquent : $\underline{\underline{\dfrac{g(n+1)}{n+2} \leq \dfrac{g(x+n)}{x+n+1} \leq \dfrac{g(n)}{n+1}}}$ pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

g est périodique de période 1 donc $g(x+n) = g(x)$; de plus $g(n) = g(n+1) = \frac{\pi}{2}$

Il vient donc : $\dfrac{\pi/2}{n+2} \leq \dfrac{g(x)}{x+n+1} \leq \dfrac{\pi/2}{n+1}$; ou : $\underline{\underline{\dfrac{\pi}{2}\, \dfrac{x+n+1}{n+2} \leq g(x) \leq \dfrac{\pi}{2}\, \dfrac{x+n+1}{n+1}}}$ ... pour tout $n \in \mathbb{N}$!!

Soit $x \in [0,1]$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\pi}{2} \frac{x+n+1}{n+2} \leq g(x) \leq \frac{\pi}{2} \frac{x+n+1}{n+1}$ et : $\lim_{n\to+\infty} \frac{x+n+1}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x+n+1}{n+1} = 1$

Par encadrement : $g(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [0,1]$. Comme g est périodique de période 1, $g(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

g vaut constamment $\frac{\pi}{2}$ sur $[0,+\infty[$. $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $(x+1) W(x+1) W(x) = \frac{\pi}{2}$

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par décroissance de W sur $\mathbb{R}_+$ on peut écrire que : $W(x+2) \leq W(x+1) \leq W(x)$

En divisant par $W(x)$ on obtient : $\frac{x+1}{x+2} = \frac{W(x+2)}{W(x)} \leq \frac{W(x+1)}{W(x)} \leq 1$ ($W(x) > 0$ car $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $(\sin t)^x > 0$)

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1$; le théorème d'encadrement donne alors : $\lim_{x\to+\infty} \frac{W(x+1)}{W(x)} = 1$

Finalement $W(x+1) \underset{+\infty}{\sim} W(x)$

d) $\frac{\pi}{2} = (x+1) W(x+1) W(x) \underset{+\infty}{\sim} x W(x) W(x)$; $W^2(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$; $\sqrt{W^2(x)} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$

$W(x) = |W(x)| = \sqrt{W^2(x)} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$; $W(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$. En particulier : $\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

$W(x) \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}^+$

PARTIE III — A) Calcul de l'intégrale de Gauss.

a) La concavité de la fonction ln donne : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln t \leq t-1$ (écrire que la courbe est en dessous de sa tangente au point d'abscisse 1).

Donc $\forall y \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+y) \leq y$.

Soit $(x,u) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $x > 0$ et $u > -x$. $\frac{u}{x} > -1$; $\ln(1+\frac{u}{x}) \leq \frac{u}{x}$;

$x \ln(1+\frac{u}{x}) \leq u$; $\ln((1+\frac{u}{x})^x) \leq u$; $(1+\frac{u}{x})^x \leq e^u$

Pour $(u,x) \in \mathbb{R}^2$, $x > 0$ et $u > -x$ donnent : $(1+\frac{u}{x})^x \leq e^u$

b) Soit $x \in [1,+\infty[$.

- Si $t \in [0,\sqrt{x}[$, $-t^2 > -x$. L'inégalité précédente donne.

$\forall t \in [0,\sqrt{x}[$, $(1-\frac{t^2}{x})^x \leq e^{-t^2}$; ceci vaut encore pour $t = \sqrt{x}$ ... ou presque !

Donc $\forall t \in [0,\sqrt{x}]$, $(1-\frac{t^2}{x})^x \leq e^{-t^2}$. En intégrant il vient : $\int_0^{\sqrt{x}} (1-\frac{t^2}{x})^x dt \leq \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt$

- Si $t \in [0,\sqrt{x}]$, $t^2 > -x$!

d'après a) : $(1+\frac{t^2}{x})^x \leq e^{t^2}$ pour tout $t \in [0,\sqrt{x}]$; ou : $\forall t \in [0,\sqrt{x}]$, $e^{-t^2} \leq (1+\frac{t^2}{x})^{-x}$

En intégrant on obtient : $\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt \leq \int_0^{\sqrt{x}} (1+\frac{t^2}{x})^{-x}dt$

$f : t \mapsto (1+\frac{t^2}{x})^{-x}$ est continue (donc localement intégrable) et positive sur $[0,+\infty[$ et

$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{t^2}{x}\right)^{-x} = \frac{x^x}{t^{2x}}$. $x \geq 1$ donc $2x \geq 2$; ceci amène la convergence

de $\int_1^{+\infty} \frac{x^x}{t^{2x}}dt$ donc de $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ (règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives). Ceci donne l'existence de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$. f étant positive sur $\mathbb{R}_+$, $\int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt \leq \int_0^{+\infty} f(t)dt$.

Finalement : $\forall x \in [1,+\infty[$, $\int_0^{\sqrt{x}} (1-\frac{t^2}{x})^x dt \leq \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt \leq \int_0^{+\infty}(1+\frac{t^2}{x})^{-x}dt$.

c) $\forall x \in [1,+\infty[$ $\int_0^{\sqrt{x}} (1-\frac{t^2}{x})^x dt = \int_{\pi/2}^{0} (1-\frac{x\cos^2 u}{x})^x(-\sqrt{x}\sin u)du = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x}(1-\cos^2 u)^x \sin u\,du = \sqrt{x}\int_0^{\pi/2} (\sin u)^{2x+1}du$

$$\begin{cases} t = \sqrt{x}\cos u \\ dt = -\sqrt{x}\sin u \\ u = \operatorname{Arccos}(t/\sqrt{x}) \end{cases}$$

$\int_0^{\sqrt{x}} (1-\frac{t^2}{x})^x dt = \sqrt{x}\, W(2x+1)$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. $\int_0^A (1+\frac{t^2}{x})^{-x}dt = \int_{\pi/2}^{\operatorname{Arccotan} A/\sqrt{x}} (1+\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u})^{-x}\sqrt{x}\,\frac{(-\sin u)\sin u - \cos u\cos u}{\sin^2 u}du$

$$\begin{cases} t = \sqrt{x}\frac{\cos u}{\sin u} \\ u = \operatorname{Arccotan}\frac{t}{\sqrt{x}}\,! \end{cases}$$

$\int_0^A (1+\frac{t^2}{x})^{-x}dt = \int_{\operatorname{Arccotan} A/\sqrt{x}}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 u}\right)^{-x}\sqrt{x}\,\frac{du}{\sin^2 u} = \sqrt{x}\int_{\operatorname{Arccotan} A/\sqrt{x}}^{\pi/2} (\sin u)^{2x-2}du$. $\lim\limits_{A\to+\infty} \operatorname{Arccotan}\frac{A}{\sqrt{x}} = 0$

donc $\int_0^{+\infty} (1+\frac{t^2}{x})^{-x}dt = \sqrt{x}\, W(2x-2)$

Les inégalités de b) fournissent alors : $\sqrt{x}\,W(2x+1) \leq \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt \leq \sqrt{x}\,W(2x-2)$ pour tout $x \in [1,+\infty[$.

d) $\sqrt{x}\,W(2x+1) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x}\sqrt{\frac{\pi}{2(2x+1)}} = \sqrt{\frac{\pi x}{2(2x+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,W(2x+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$\sqrt{x}\,W(2x-2) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x}\sqrt{\frac{\pi}{2(2x-2)}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,W(2x-2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Le théorème d'encadrement donne alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}/2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x^2}} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}/2$

Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}/2$.

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ existe et vaut $\sqrt{\pi}/2$. $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. $\int_0^A e^{-t^2/2}dt \underset{u=t/\sqrt{2}}{=} \int_0^{A/\sqrt{2}} e^{-u^2}\sqrt{2}\,du = \sqrt{2}\int_0^{A/\sqrt{2}} e^{-u^2}du$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^{A/\sqrt{2}} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Par conséquent : $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-t^2/2}dt = \sqrt{2}\times\sqrt{\pi}/2 = \sqrt{\pi/2}$. $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$ existe et vaut $\sqrt{\pi/2}$.

Par parité $\int_{-\infty}^0 e^{-t^2/2}dt$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{\pi/2}$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$ existe et vaut $2\sqrt{\pi/2} = \sqrt{2\pi}$; normale !!

PARTIE III B) Calcul de valeurs approchées de π

Q1.. a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par décroissance : $W(x+2) \leq W(x+1) \leq W(x)$.

Donc $\frac{W(x+2)}{W(x)} = \frac{x+1}{x+2} \leq h(x) \leq 1$ car $W(x) > 0$.

. Donc $\frac{x+1}{x+2} - 1 = -\frac{1}{x+2} \leq h(x) - 1 \leq 0$; $\frac{1}{x+2} \geq -h(x)+1 \geq 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq 1 - h(x) \leq \frac{1}{x+2}$.

b) Soit $x \in [2,+\infty[$. $h(x) = \frac{W(x+1)}{W(x)} = \frac{\frac{x}{x+1}W(x-1)}{\frac{x-1}{x}W(x-2)} = \frac{x^2}{x^2-1}h(x-2)$.

$\forall x \in [2,+\infty[,\ h(x) = \frac{x^2}{x^2-1}h(x-2)$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h(2n) = \frac{2}{\pi}\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}$

→ $h(2) = \frac{2^2}{2^2-1}\ h(0) = \frac{4}{3}\,\frac{W(1)}{W(0)} = \frac{4}{3}\times\frac{1}{\pi/2} = \frac{8}{3\pi}$.

$\frac{2}{\pi}\prod_{k=1}^{1}\frac{4k^2}{4k^2-1} = \frac{2}{\pi}\times\frac{4}{4-1} = \frac{8}{3\pi}$. L'égalité vaut donc pour $n=1$.

→ Supposons l'égalité vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $n+1$.

$h(2(n+1)) = h(2n+2) = \frac{(2n+2)^2}{(2n+2)^2-1}\,h(2n) = \frac{4(n+1)^2}{4(n+1)^2-1}\,\frac{2}{\pi}\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1} = \frac{2}{\pi}\prod_{k=1}^{n+1}\frac{4k^2}{4k^2-1}$, ce qui achève la récurrence.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h(2n) = \frac{r_n}{\pi}$ avec $r_n = 2\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h(x) = \dfrac{W(x+1)}{W(x)}$. $W(x+1) \underset{+\infty}{\sim} W(x)$ donc $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = 1$.

Par conséquent : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} r_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \pi h(2n) = \pi$. $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} r_n = \pi$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq 1 - h(x) \leq \dfrac{1}{x+2}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \pi - \pi h(2n) \leq \dfrac{\pi}{2n+2}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{\underline{0 \leq \pi - r_n \leq \dfrac{\pi}{2(n+1)}}}$!!!

c) Voir à la fin. Pour $n = 25$, $r_{25} \simeq 3,1109$

Pour $n = 75$, $r_{75} \simeq 3,1312$

Q2.. Accélérons ! (mais n'attendons pas de miracle .. avec π...)

a) Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $n \geq 1$ et $m \geq 1$.

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} = \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k = \sum_{k=n+1}^{n+m} (\ln r_k - \ln r_{k-1}) = \ln r_{n+m} - \ln r_n = \ln \frac{r_{n+m}}{r_n}$$

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} = \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k = \sum_{k=n+1}^{n+m} (\ln r_k - \ln r_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{n+m} \ln \frac{r_k}{r_{k-1}}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+m} \ln \frac{r_k}{r_{k-1}} = \ln(r_{n+m}/r_n)$. Or si $k \geq 2$: $\dfrac{r_k}{r_{k-1}} = \dfrac{2\prod_{i=1}^{k} \frac{4i^2}{4i^2-1}}{2\prod_{i=1}^{k-1} \frac{4i^2}{4i^2-1}} = \dfrac{4k^2}{4k^2-1}$

donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{4k^2}{4k^2-1} = \ln \frac{r_{n+m}}{r_n}$; notons que $\lim\limits_{m \mapsto +\infty} \dfrac{r_{n+m}}{r_n} = \dfrac{\pi}{r_n}$. Par conséquent :

$$\ln \frac{\pi}{r_n} = \lim_{m \mapsto +\infty} \ln \frac{r_{n+m}}{r_n} = \lim_{m \mapsto +\infty} \sum_{k=n+1}^{n+m} \ln \frac{4k^2}{4k^2-1}.$$

Ceci s'écrit encore : $\displaystyle\ln \frac{\pi}{r_n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln \frac{4k^2}{4k^2-1} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln \frac{4k^2-1}{4k^2} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$

Finalement : $\underline{\underline{\displaystyle\ln \frac{\pi}{r_n} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)}}$ ... pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. $\forall t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leq \dfrac{1}{t^2} \leq \dfrac{1}{k^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{(k+1)^2} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k^2} = \frac{1}{k^2}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{(k+1)^2} \leq \left[-\frac{1}{t}\right]_k^{k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2}$. Sommons !

Soit $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ tel que : $n\geq 1$ et $m\geq 1$

$$\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{(k+1)^2}\leq\sum_{k=n+1}^{n+m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\leq\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k=n+2}^{n+m+1}\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+m+1}\leq\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k^2}.$$ La série de terme général $\frac{1}{k^2}$ étant convergente

nous pouvons faire tendre m vers $+\infty$. Ce qui donne :

$$\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{n+1}\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\ ;\quad\frac{1}{n+1}\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n+2}{(n+1)^2}\leq\frac{1}{n}$$

Finalement : $\underline{\underline{\dfrac{1}{n+1}\leq\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{n}.}}$

__c]__ ε est dérivable sur $]0,1[$. $\forall x\in]0,1[$, $\varepsilon(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)-1$

$\forall x\in]0,1[$, $\varepsilon'(x)=\frac{1}{x^2}\ln(1-x)-\frac{1}{x}\,\frac{-1}{1-x}=\frac{1}{x^2}\left[\ln(1-x)+\frac{x}{1-x}\right]$

$\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln t\leq t-1$; donc $\forall x\in]0,1[$, $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\leq\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}$.

Par conséquent : $0\leq-\ln\frac{1}{1-x}+\frac{x}{1-x}=\ln(1-x)+\frac{x}{1-x}$ pour tout $x\in]0,1[$.

ceci montre alors que : $\forall x\in]0,1[$, $\varepsilon'(x)\geq 0$.

$\underline{\underline{\varepsilon\text{ est croissante sur }]0,1[.}}$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $k\in[\![n,+\infty[\![$

$\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)\leq 1-\frac{1}{4k^2}-1=-\frac{1}{4k^2}$; $\underline{\frac{1}{4k^2}\leq-\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)}$

$\frac{1}{4k^2}\leq\frac{1}{4n^2}$ donc $\varepsilon\left(\frac{1}{4k^2}\right)\leq\varepsilon\left(\frac{1}{4n^2}\right)=\varepsilon_n$; $-\dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)+\frac{1}{4k^2}}{1/4k^2}\leq\varepsilon_n$;

$-\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)-\frac{1}{4k^2}\leq\varepsilon_n\frac{1}{4k^2}$; $\underline{-\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)\leq(1+\varepsilon_n)\frac{1}{4k^2}}$

Finalement : $\underline{\underline{\frac{1}{4k^2}\leq-\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)\leq(1+\varepsilon_n)\frac{1}{4k^2}}}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![n,+\infty[\![$.

__d]__ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après c. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2}\leq-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)\leq(1+\varepsilon_n)\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2}$

donc $\displaystyle\frac{1}{4(n+1)}\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2}\leq-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)=\ln\frac{\pi}{r_n}\leq(1+\varepsilon_n)\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2}\leq(1+\varepsilon_n)\frac{1}{4n}.$

Par conséquent : $\frac{n}{n+1} \leq 4n \ln \frac{\pi}{r_n} \leq (1+\varepsilon_n)$.

$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$; $\frac{\ln(1-x)+x}{x} = -\frac{x}{2} + o(x)$; $-\frac{\ln(1-x)+x}{x} = \frac{x}{2} + o(x)$

$\varepsilon(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$; $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$; $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = \lim_{n \to +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{4n^2}\right) = 0$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} (1+\varepsilon_n) = 1$; par encadrement : $\lim_{n \to +\infty} \left(4n \ln \frac{\pi}{r_n}\right) = 1$. $\underline{\underline{\ln \frac{\pi}{r_n} \sim \frac{1}{4n}}}$

$\ln x \underset{1}{\sim} x - 1$; $\ln \frac{\pi}{r_n} \sim \frac{\pi}{r_n} - 1 = \frac{\pi - r_n}{r_n}$; or $\ln \frac{\pi}{r_n} \sim \frac{1}{4n}$; par conséquent : $\frac{1}{4n} \sim \frac{\pi - r_n}{r_n}$; soit : $\underline{\underline{\pi - r_n \sim \frac{r_n}{4n}}}$; $\underline{\pi - r_n \sim \frac{\pi}{4n}}$

Pour $n = 25$ $r_n \simeq 3,1109$ $\left(1 + \frac{1}{4n}\right) r_n \simeq 3,1421$

Pour $n = 75$ $r_n \simeq 3,1312$ $\left(1 + \frac{1}{4n}\right) r_n \simeq 3,1416$

```
program ESCP94;

uses crt;
var k,n:integer;p:real;

begin
clrscr;
write('Donnez la valeur de n. n=');readln(n);
p:=1;
for k:=1 to n do p:=p/(1-0.25/k/k);
p:=2*p;
writeln;writeln('Pour n=',n);
write('rn vaut sensiblement : ',p:12:9);
writeln (' (la différence à pi est : ',pi-p:12:9,' )');
p:=p*(1+0.25/n);
writeln;write('(1+1/(4n))rn vaut sensiblement : ',p:12:9);
writeln(' (le delta est : ',pi-p:12:9,' )')
end.
```

```
Donnez la valeur de n. n=25

Pour n=25
rn vaut sensiblement :  3.110945167 (la différence à pi est :  0.030647487 )

(1+1/(4n))rn vaut sensiblement :  3.142054618 (le delta est : -0.000461965 )
```

```
Donnez la valeur de n. n=75

Pour n=75
rn vaut sensiblement :  3.131207308 (la différence à pi est :  0.010385345 )

(1+1/(4n))rn vaut sensiblement :  3.141644666 (le delta est : -0.000052012 )
```