CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES I

OPTION GENERALE

mercredi 18 mai 1994, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées :

- Règles graduées.
- Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

Dans tout le problème, on désigne par W la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$W(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x t \,\mathrm{d}t$$

L'objectif est d'étudier cette fonction W et d'en déduire quelques applications.

PARTIE I. Étude d'une intégrale impropre

On désigne par f la fonction définie sur $]0, \pi/2]$ par la relation :

$$f(x) = -\int_x^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel t appartenant à $[0, \pi/2]$:

$$\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer les primitives de la fonction :

$$t \mapsto \ln \frac{2t}{\pi}$$

En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale :

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{2t}{\pi}\, dt$$

3. Établir que la fonction f est monotone et bornée sur $]0, \pi/2]$; en déduire la convergence de l'intégrale suivante :

$$L = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt$$

4. On se propose enfin de calculer L à l'aide des deux intégrales suivantes (dont la convergence résultera de la question *a*) ci-dessous) :

$$J = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t)\, dt \qquad K = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\, dt$$

a) Obtenir des relations entre les intégrales J, K et L en effectuant dans cette dernière les changements de variables $u = \pi - t$ et $u = \pi/2 - t$.

b) Exprimer $K + L$ en fonction de $L + J$ (on rappelle que $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$).

c) En déduire les valeurs des intégrales J, K et L.

PARTIE II. Étude de la fonction W

1. Soient x et y des nombres réels positifs tels que $x \leq y$. Comparer $W(x)$ et $W(y)$ et en déduire le sens de variation de la fonction W sur $[0, +\infty[$.

2. On considère des nombres réels positifs x et x_0.

a) Montrer que, pour tout nombre réel positif a :

$$\left|e^{-ax} - e^{-ax_0}\right| \leq a\,|x - x_0|$$

b) En déduire l'inégalité suivante :

$$|W(x) - W(x_0)| \leq \frac{\pi \ln 2}{2}\,|x - x_0|$$

c) Établir la continuité de W sur $[0, +\infty[$.

3. Pour tout nombre réel positif x, exprimer $W(x+2)$ en fonction de $W(x)$ à l'aide d'une intégration par parties (on écrira à cet effet : $\sin^{x+2} t = \sin t \sin^{x+1} t$).

4. On se propose d'étudier le comportement asymptotique de W à l'aide de la fonction auxiliaire g définie pour $x \geq 0$ par $g(x) = (x+1)\, W(x+1)\, W(x)$.

a) Établir que, pour tout nombre réel positif ou nul x, $g(x+1) = g(x)$.
En déduire la valeur de $g(n)$ pour tout nombre entier naturel n.

b) Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$ et tout nombre entier naturel n :

$$\frac{g(n+1)}{n+2} \leq \frac{g(x+n)}{x+n+1} \leq \frac{g(n)}{n+1}$$

En déduire en fonction de n un encadrement de $g(x)$. En conclure que g est constante sur $[0, +\infty[$ (on explicitera son unique valeur).

c) En remarquant que $W(x+2) \leq W(x+1) \leq W(x)$, montrer que $W(x+1)$ est équivalent à $W(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

d) Déduire de ces résultats que, lorsque x tend vers $+\infty$:

$$W(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

PARTIE III. Applications

A) Calcul de l'intégrale de Gauss :

$$G = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t$$

a) Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x et tout nombre réel $u > -x$:

$$\left(1 + \frac{u}{x}\right)^x \leq \exp u$$

On pourra étudier pour $u > -x$ le signe de la fonction $u \mapsto u - x \ln\left(1 + \frac{u}{x}\right)$.

b) En intégrant l'inégalité précédente avec des valeurs convenables de u, établir que, pour $x \geq 1$:

$$\int_0^{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{t^2}{x}\right)^x \mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{x}} \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{x}\right)^{-x} \mathrm{d}t$$

c) En posant respectivement $t = \sqrt{x}\cos u$ et $t = \sqrt{x}\,\dfrac{\cos u}{\sin u}$ dans la première et la dernière de ces intégrales, établir que, pour $x \geq 1$:

$$\sqrt{x}\, W(2x+1) \leq \int_0^{\sqrt{x}} \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t \leq \sqrt{x}\, W(2x-2)$$

d) À l'aide de l'équivalent de W obtenu à la fin de la partie II, en déduire la convergence et la valeur de l'intégrale G, et retrouver la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\frac{-t^2}{2} \mathrm{d}t$$

B) Calcul de valeurs approchées du nombre π

1. On pose, pour tout nombre réel positif x :

$$h(x) = \frac{W(x+1)}{W(x)}$$

a) En remarquant que $W(x+2) \leq W(x+1) \leq W(x)$ et en utilisant la relation établie à la question II.3, établir que :

$$0 \leq 1 - h(x) \leq \frac{1}{x+2}$$

b) Exprimer $h(x)$ en fonction de $h(x-2)$ pour $x \geq 2$, et en déduire que, pour tout nombre entier naturel n :

$$h(2n) = \frac{r_n}{\pi} \quad \text{avec} \quad r_n = 2 \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}$$

En déduire la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$ et un encadrement de $\pi - r_n$.

c) Écrire en PASCAL un algorithme permettant le calcul de r_n.
Donner des valeurs approchées de r_n (avec 4 décimales) pour $n = 25$ et $n = 75$.

2. On se propose d'accélérer la convergence de la suite (r_n).

a) On pose pour tout nombre entier $k \geq 2$: $u_k = \ln r_k - \ln r_{k-1}$.
En calculant $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m}$ et en faisant tendre m vers $+\infty$, établir que :

$$\ln \frac{\pi}{r_n} = - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$$

b) En comparant une série à une intégrale, établir l'inégalité:

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$$

c) Étudier la variation sur $]0, 1[$ de la fonction $\varepsilon : x \mapsto - \dfrac{\ln(1-x)+x}{x}$.

En déduire que, pour tout entier naturel $k \geq n$:

$$\frac{1}{4k^2} \leq - \ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \leq (1 + \varepsilon_n) \frac{1}{4k^2} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n = \varepsilon\left(\frac{1}{4n^2}\right)$$

d) Déduire des résultats précédents un équivalent de $\ln \dfrac{\pi}{r_n}$ et prouver que :

$$\pi - r_n \sim \frac{r_n}{4n}$$

Déduire enfin des valeurs approchées de r_n obtenues précédemment des valeurs approchées de :

$$\left(1 + \frac{1}{4n}\right) r_n$$

(avec 4 décimales) pour $n = 25$ et $n = 75$.