PARTIE I

(Q1) a) $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto e^x-1$ est continue et non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$; "par quotient" f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$e^x-1 \underset{0}{\sim} x$; $\dfrac{x}{e^x-1} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\mapsto 0}\left(\dfrac{x}{e^x-1}\right)=1=f(0)$; f est continue en 0.

cl... $\underline{f \text{ est continue sur son domaine de définition } [0,+\infty[.}$

b) $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{e^x}=xe^{-x}$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}(xe^{-x})=0$; $\underline{\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=0}$

(Q2) a) $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto e^x-1$ est dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$; "par quotient" f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f'(x)=\frac{1}{(e^x-1)^2}\left[e^x-1-xe^x\right].$$

b) $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{x}{e^x-1}-1\right]=\dfrac{1}{x(e^x-1)}(x-e^x+1) \underset{0}{\sim} \dfrac{-1}{x^2}(e^x-x-1)$.

· $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$; $e^x-x-1=\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$; $e^x-x-1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\mapsto 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{-1}{2}$.

cl... $\underline{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0)=\frac{-1}{2}.}$

c) Pour l'instant
- f est continue sur $\mathbb{R}_+$
- f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$
- $f'(0)=\frac{-1}{2}$.
- $\forall x\in\,]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$; f' est donc continue sur $]0,+\infty[$.

Par conséquent f est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si f' est continue en 0, autrement dit si et seulement si : $\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\dfrac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{-1}{2}$.

(ψ1) $\forall x\in\,]0,+\infty[$, $\dfrac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{e^x-1-x}{(e^x-1)^2}+\dfrac{x(1-e^x)}{(e^x-1)^2}=\dfrac{e^x-1-x}{(e^x-1)^2}-\dfrac{x}{e^x-1}=\dfrac{x}{e^x-1}\left[\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}-1\right]$

$\forall x\in\,]0,+\infty[$, $\dfrac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}=f(x)\left[-\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}-1\right]$. donc : $\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\dfrac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}=1\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right]=-\frac{1}{2}$

Q2 $\dfrac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{e^x-1-xe^x}{x^2}$.

$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$; $x e^x = x+x^2+o(x^2)$

Donc $e^x-1-xe^x = 1+x+\frac{x^2}{2}-1-x-x^2+o(x^2) = -\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.

Par conséquent : $\dfrac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{-x^2/2}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$; $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Ceci achève de prouver que : <u>f est C^1 sur $[0,+\infty[$.</u>

Q3 φ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in [0,+\infty[$, $\varphi'(x) = -1+e^{-x} \leq 0$.

<u>φ est donc décroissante sur $[0,+\infty[$.</u>

Comme $\varphi(0)=0$, on a : $\forall x \in [0,+\infty[$, $1-x-e^{-x} = \varphi(x) \leq 0$.

Or $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}(1-e^{-x}-x) = \dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}\varphi(x) \leq 0$.

Résumé : <u>$\forall x \in [0,+\infty[$, $f'(x) \leq 0$.</u>

Q4 ψ est dérivable sur $[0,+\infty[$. $\forall x \in [0,+\infty[$, $\psi'(x) = 1 + e^x + (x-2)e^x = 1+xe^x-e^x$

Donc $\forall x \in]0,+\infty[$, $\psi'(x) = -f'(x)(e^x-1)^2 \geq 0$. Il y a aussi $\psi'(x) = e^x(-\varphi(x))$... !!

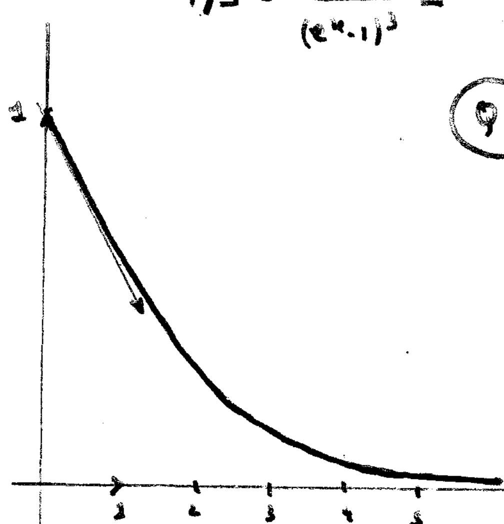
Comme $\psi'(0)=0$: <u>$\forall x \in [0,+\infty[$, $\psi'(x) \geq 0$.</u> <u>ψ est croissante sur $[0,+\infty[$.</u>

f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{(e^x-e^x-xe^x)(e^x-1)^2-2e^x(e^x-1)(e^x-1-xe^x)}{(e^x-1)^4}$

$\forall x \in]0,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1}{(e^x-1)^3}\left[-e^x\left(x(e^x-1)+2(e^x-1-xe^x)\right)\right] = -\dfrac{e^x}{(e^x-1)^3}\left[-x-2+(-x+2)e^x\right]$

$\forall x \in]0,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{e^x}{(e^x-1)^3}\psi(x)$

Q5



Par conséquent : <u>$\forall x \in]0,+\infty[$, $f''(x) \geq 0$.</u>

▼ Remarque.. f' est continue sur $[0,+\infty[$ et de dérivée positive sur $]0,+\infty[$; f' est donc croissante sur $[0,+\infty[$. Par conséquent f est <u>convexe</u> sur $[0,+\infty[$. ▼

Exercice.. Prouver que f' est dérivable en 0 et que $f''(0) = 1/6$.

PARTIE II $p \in \mathbb{N}$.

Q1 a) $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. $x \mapsto x^p e^{-\lambda x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc localement intégrable.

$$\lim_{x \to +\infty} x^2(x^p e^{-\lambda x}) = 0 \text{ car } \lambda \in]0,+\infty[\text{ ; par conséquent :}$$

$\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in [A,+\infty[$, $x^2(x^p e^{-\lambda x}) \leq 1$.

Donc $\forall x \in [A,+\infty[$, $0 \leq x^p e^{-\lambda x} \leq \dfrac{1}{x^2}$.

La convergence de $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ et la positivité de $x \mapsto x^p e^{-\lambda x}$ sur $[A,+\infty[$ assurent la convergence de $\displaystyle\int_A^{+\infty} x^p e^{-\lambda x}\,dx$ et donc de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^p e^{-\lambda x}\,dx$.

Cl.. $\underline{\underline{K(p,\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^p e^{-\lambda x}\,dx \text{ converge}}}$ pour tout réel λ strictement positif.

$$K(0,\lambda) = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^A = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{\lambda}\left[1 - e^{-\lambda A}\right] = \frac{1}{\lambda}.$$

$\underline{\underline{K(0,\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}.}}$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$
Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. $\displaystyle\int_0^A \underset{u}{x^{p+1}} \underset{v'}{e^{-\lambda x}}\,dx = \left[x^{p+1}\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^A - \int_0^A (p+1)x^p\left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]dx$

$\displaystyle\int_0^A x^{p+1}e^{-\lambda x}\,dx = -\frac{1}{\lambda}A^{p+1}e^{-\lambda A} + \frac{p+1}{\lambda}\int_0^A x^p e^{-\lambda x}\,dx$. En faisant tendre A vers $+\infty$

il vient : $\underline{\underline{K(p+1,\lambda) = \dfrac{p+1}{\lambda}K(p,\lambda).}}$ (car $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} A^{p+1}e^{-\lambda A} = 0$)

c) Donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\dfrac{K(p+1,\lambda)}{(p+1)!}\lambda^{p+1} = \dfrac{K(p,\lambda)}{p!}\lambda^p$. La suite $\left(\dfrac{K(p,\lambda)\lambda^p}{p!}\right)_{p \geq 0}$ est constante.

Donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\dfrac{K(p,\lambda)}{p!}\lambda^p = \dfrac{K(0,\lambda)\lambda^0}{0!} = \dfrac{1}{\lambda}$.

Finalement : $\underline{\underline{\forall p \in \mathbb{N},\ K(p,\lambda) = \dfrac{p!}{\lambda^{p+1}}.}}$

Remarque.. La récurrence proposée n'était pas très raisonnable.

Q2 a) Notons que : $\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) \leq e^{-x/2}$

L'inégalité est claire pour $x=0$ $\quad$ ($f(0)=1 \leq 1 = e^{-0/2}$!)

Soit $x \in]0,+\infty[$. $f(x) \leq e^{-x/2} \underset{e^x-1>0}{\Longleftrightarrow} x \leq (e^x-1)e^{-x/2} \Longleftrightarrow 0 \leq e^{x/2}-e^{-x/2}-x$

Considérons la fonction $h : x \mapsto e^{x/2}-e^{-x/2}-x$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \frac{1}{2}(e^{x/2}+e^{-x/2})-1 = \frac{1}{2}(e^{x/2}+e^{-x/2}-2) = \dfrac{(e^{\frac{x}{4}}-e^{-\frac{x}{4}})^2}{2} \geq 0$.

h est croissante sur $\mathbb{R}$ et $h(0)=0$. Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h(x) \geq 0$

En particulier : $\forall x \in]0,+\infty[$, $0 \leq e^{x/2}-e^{-x/2}-x$

Ceci achève de prouver que : $\underline{\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) \leq e^{-x/2}}$.

b) $x \mapsto x^p f(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et positive. En particulier cette fonction est localement intégrable sur $[0,+\infty[$.

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} xe^{-x}$; $x^p f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{p+1}e^{-x}$. D'après II Q1 a) : $\int_0^{+\infty} x^{p+1}e^{-x}\,dx$ converge ;

la positivité de f assure alors la $\underline{\text{convergence de } \int_0^{+\infty} x^p f(x)\,dx}$.

▼ Remarque .. On pouvait aussi utiliser : $\forall x \in [0,+\infty[$, $0 \leq x^p f(x) \leq x^p e^{-x/2}$ ▼

Q3 a) La série de terme général $\frac{1}{k^{p+2}}$ converge car $p+2>1$ (... Riemann).

b) Soit $x \in]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} e^{-kx} \underset{e^{-x}\neq 1}{=} e^{-x}\,\frac{1-(e^{-x})^n}{1-e^{-x}} \underset{e^{-x}=\frac{1}{e^x}}{=} \frac{1-e^{-nx}}{e^x-1} = \frac{1}{e^x-1} - \frac{e^{-nx}}{e^x-1}$$

Donc : $\underline{\dfrac{1}{e^x-1} = \sum_{k=1}^{n} e^{-kx} + \dfrac{e^{-nx}}{e^x-1}}$, pour tout x dans $]0,+\infty[$ et n dans $\mathbb{N}^*$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$f(x) = \frac{x}{e^x-1} = \sum_{k=1}^{n} xe^{-kx} + \frac{xe^{-nx}}{e^x-1} = \sum_{k=1}^{n} xe^{-kx} + f(x)e^{-nx}$$

$\underline{f(x) = \sum_{k=1}^{n} xe^{-kx} + f(x)e^{-nx}}$ ... égalité qui vaut encore pour 0.

Donc : $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x e^{-kx} + f(x) e^{-nx}$.

$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge, $\int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx$ aussi et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Ceci suffit alors pour obtenir : $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx + \int_0^{+\infty} f(x) e^{-nx} dx$.

(la convergence de la dernière intégrale est assurée par la convergence des intégrales qui la précèdent !)

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx \overset{\text{II Q 1 c}}{=} \frac{1!}{k^{1+1}} = \frac{1}{k^2}.$$

donc $I_0 = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) $\forall x \in [0,+\infty[$, $0 \leq f(x) e^{-nx} \leq e^{-\frac{x}{2}} e^{-nx} = e^{-(n+\frac{1}{2})x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

d'après II Q 1 a) $\int_0^{+\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})x} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \int_0^{+\infty} f(x) e^{-nx} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})x} dx = \frac{1}{n+1/2}$.

Le théorème d'encadrement montre alors que : $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx} dx = 0$.

Ceci suffit pour dire alors que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = I_0 = \int_0^{+\infty} f(x)dx$

Finalement : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$ ou $I_0 = A_0$.

e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x e^{-kx} + f(x)e^{-nx}$

donc $\forall x \in [0,+\infty[$, $x^p f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{p+1} e^{-kx} + x^p f(x) e^{-nx}$

$\int_0^{+\infty} x^p f(x) dx$ converge ainsi que $\int_0^{+\infty} x^{p+1} e^{-kx} dx$ et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Il vient alors en intégrant la dernière égalité : $\int_0^{+\infty} x^p f(x) dx = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} x^{p+1} e^{-kx} dx + \int_0^{+\infty} x^p f(x) e^{-nx} dx$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} x^{p+1} e^{-kx}\,dx = \frac{(p+1)!}{k^{p+2}}$

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_p = \int_0^{+\infty} x^p f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{(p+1)!}{k^{p+2}} + \int_0^{+\infty} x^p f(x) e^{-nx}\,dx$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $0 \le f(x) \le 1$. (... ce qui est encore plus simple que : $0 \le f(x) \le e^{-x/2}$!)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,+\infty[$, $0 \le x^p f(x) e^{-nx} \le x^p e^{-nx}$

$\int_0^{+\infty} x^p e^{-nx}\,dx$ existe et vaut : $\frac{p!}{n^{p+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le \int_0^{+\infty} x^p f(x) e^{-nx}\,dx \le \int_0^{+\infty} x^p e^{-nx}\,dx = \frac{p!}{n^{p+1}}$

Le théorème d'encadrement donne alors : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} x^p f(x) e^{-nx}\,dx = 0$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{p!}{n^{p+1}} = 0$

Donc $I_p = \int_0^{+\infty} x^p f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(p+1)!}{k^{p+2}} = (p+1)!\, A_p$.

(*) $I_p = \int_0^{+\infty} x^p f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1}\,dx = (p+1)! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} = (p+1)!\, A_p$ $\qquad$ $\underline{I_p = (p+1)!\, A_p}$.

(*) Voir remarque à la fin du devoir.

PARTIE III

Q1) a) $\int_x^{x+\frac12} \underbrace{(t-x-\tfrac12)^2}_{u} \underbrace{g''(t)}_{v'}\,dt = \left[(t-x-\tfrac12)^2 g'(t)\right]_x^{x+\frac12} - \int_x^{x+\frac12} \underbrace{2(t-x-\tfrac12)}_{u} \underbrace{g'(t)}_{v'}\,dt$

$$= -(-\tfrac12)^2 g'(x) - 2\left[(t-x-\tfrac12)g(t)\right]_x^{x+\frac12} + 2\int_x^{x+\frac12} 1 \times g(t)\,dt$$

$$= -\tfrac14 g'(x) + 2(-\tfrac12)g(x) + 2\int_x^{x+\frac12} g(t)\,dt$$

Donc $\underline{\int_x^{x+\frac12} (t-x-\tfrac12)^2 g''(t)\,dt = -\tfrac14 g'(x) - g(x) + 2\int_x^{x+\frac12} g(t)\,dt}$

$\int_{x-\frac12}^{x} \underbrace{(t-x+\tfrac12)^2}_{u} \underbrace{g''(t)}_{v'}\,dt = \left[(t-x+\tfrac12)^2 g'(t)\right]_{x-\frac12}^{x} - \int_{x-\frac12}^{x} 2(t-x+\tfrac12) g'(t)\,dt = \tfrac14 g'(x) - 2\int_{x-\frac12}^{x} \underbrace{(t-x+\tfrac12)}_{u} \underbrace{g'(t)}_{v'}\,dt$

$\int_{x-\frac12}^{x} (t-x+\tfrac12)^2 g''(t)\,dt = \tfrac14 g'(x) - 2\left[(t-x+\tfrac12)g(t)\right]_{x-\frac12}^{x} + 2\int_{x-\frac12}^{x} g(t)\,dt = \underline{\tfrac14 g'(x) - g(x) + 2\int_{x-\frac12}^{x} g(t)\,dt}$

▼ Remarque .. On pouvait, en remplaçant 1/2 par $\varepsilon/2$ $(\varepsilon = \pm 1)$ ne faire qu'un calcul. ▼

$$\int_{x-\frac12}^{x+\frac12} g(t)dt - \frac12\int_x^{x+1/2}\left(t-x-\frac12\right)^2 g''(t)dt - \frac12\int_{x-\frac12}^{x}\left(t-x+\frac12\right)^2 g''(t)\,dt = \int_{x-\frac12}^{x+\frac12} g(t)dt + \frac18 g'(x) + \frac12 g(x) - \int_x^{x+1/2} g(t)dt - \frac18 g'(x)$$
$$+ \frac12 g(x) - \int_{x-\frac12}^{x} g(t)dt = \int_{x-\frac12}^{x+1/2} g(t)dt + g(x) - \int_{x-1/2}^{x+1/2} g(t)dt = g(x).$$ Finalement:

$$g(x) = \int_{x-\frac12}^{x} g(t)dt - \frac12\int_x^{x+1/2}\left(t-x-\frac12\right)^2 g''(t)dt - \frac12\int_{x-1/2}^{x}\left(t-x+\frac12\right)^2 g''(t)dt.$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Appliquons le résultat précédent à $g : t \mapsto \frac{1}{t^{p+2}}$ sur $[k-\frac12, k+\frac12]$.
g est C^2 sur $[k-\frac12, k+\frac12]$ et $\forall t \in [k-\frac12, k+\frac12]$, $g''(t) = \frac{(p+2)(p+3)}{t^{p+4}}$.

Il vient alors : $g(k) = \int_{k-1/2}^{k+1/2} g(t)dt - \frac12\int_k^{k+1/2}\left(t-k-\frac12\right)^2 g''(t)dt - \frac12\int_{k-1/2}^{k}\left(t-k+\frac12\right)^2 g''(t)dt$, c'est à dire :

$$\frac{1}{k^{p+2}} = \int_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{dt}{t^{p+2}} - \frac12\int_k^{k+1/2}\left(t-k-\frac12\right)^2 \frac{(p+2)(p+3)}{t^{p+4}}dt - \frac12\int_{k-1/2}^{k}\left(t-k+\frac12\right)^2 \frac{(p+2)(p+3)}{t^{p+4}}dt$$; par conséquent :

$$\left|\frac{1}{k^{p+2}} - \int_{k-1/2}^{k+1/2}\frac{dt}{t^{p+2}}\right| \le \frac12\int_k^{k+1/2}\left(t-k-\frac12\right)^2\frac{(p+2)(p+3)}{t^{p+4}}dt + \frac12\int_{k-1/2}^{k}\left(t-k+\frac12\right)^2\frac{(p+2)(p+3)}{t^{p+4}}dt.$$

Notons que : $\forall t \in [k, k+1/2]$, $0 \le \left(t-k-\frac12\right)^2\frac{(p+2)(p+3)}{t^{p+4}} \le \left(t-k-\frac12\right)^2\frac{(p+2)(p+3)}{k^{p+4}} \le \left(t-k-\frac12\right)^2\frac{(p+2)(p+3)}{(k-\frac12)^{p+4}}$

et $\forall t \in [k-\frac12, k]$, $0 \le \left(t-k+\frac12\right)^2\frac{(p+2)(p+3)}{t^{p+4}} \le \left(t-k+\frac12\right)^2\frac{(p+2)(p+3)}{(k-1/2)^{p+4}}$.

Il vient alors : $\left|\frac{1}{k^{p+2}} - \int_{k-1/2}^{k+1/2}\frac{dt}{t^{p+2}}\right| \le \frac12\frac{(p+2)(p+3)}{(k-\frac12)^{p+4}}\left[\int_k^{k+1/2}\left(t-k-\frac12\right)^2dt + \int_{k-1/2}^{k}\left(t-k+\frac12\right)^2dt\right]$.

Or : $\int_k^{k+1/2}\left(t-k-\frac12\right)^2dt = \left[\frac{(t-k-1/2)^3}{3}\right]_k^{k+1/2} = 0 - \frac{(-1/2)^3}{3} = \frac{1}{24}$ et

$\int_{k-1/2}^{k}\left(t-k+\frac12\right)^2dt = \left[\frac{(t-k+1/2)^3}{3}\right]_{k-1/2}^{k} = \frac{(1/2)^3}{3} - 0 = \frac{1}{24}$.

Donc $\left|\frac{1}{k^{p+2}} - \int_{k-1/2}^{k+1/2}\frac{dt}{t^{p+2}}\right| \le \frac12\frac{(p+2)(p+3)}{(k-1/2)^{p+4}}\left[\frac{1}{24}+\frac{1}{24}\right]$. Finalement :

$$\left|\frac{1}{k^{p+2}} - \int_{k-\frac12}^{k+1/2}\frac{dt}{t^{p+2}}\right| \le \frac{(p+2)(p+3)}{24\,(k-\frac12)^{p+4}}$$

▼ Exercice .. Retrouver ce résultat en "4 lignes" en appliquant l'inégalité de T.L. à une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^{p+2}}$, à l'ordre 2 sur $[k, k+\frac12]$ et "$[k, k-\frac12]$" ▲ Voir à la fin.

c) $u : t \mapsto \dfrac{1}{(t-\frac{1}{2})^{p+4}}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$.

De plus $u(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{p+4}}$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{p+4}}$ converge, la positivité de u assure la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^{p+4}} = \int_1^{+\infty} u(t)\,dt$;

u étant décroissante, positive et continue : la série de terme général $u(k) = \dfrac{1}{(k-\frac{1}{2})^{p+4}}$ converge puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(t)\,dt$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in [\![n+1,+\infty[\![$

$$\forall k \in [\![n+1, q]\!], \quad u(k) = (k-(k-1))\,u(k) = \int_{k-1}^{k} u(k)\,dt \underset{\substack{\text{décroissance de } u \text{ sur } [k-1,k]\\ \downarrow}}{\leq} \int_{k-1}^{k} u(t)\,dt$$

donc $$\sum_{k=n+1}^{q} u(k) \leq \sum_{k=n+1}^{q} \int_{k-1}^{k} u(t)\,dt = \int_{n}^{q} u(t)\,dt$$

Par passage à la limite il vient : $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-\frac{1}{2})^{p+4}} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^{p+4}}$$

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^{p+4}} = \lim_{A\to+\infty} \int_n^A (t-\tfrac{1}{2})^{-p-4}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{(t-\frac{1}{2})^{-p-3}}{-p-3}\right]_n^A = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{(A-\frac{1}{2})^{-p-3} - (n-\frac{1}{2})^{-p-3}}{-p-3}\right]$$

donc $$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^{p+4}} = \frac{1}{p+3} \times \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^{p+3}}$$

Finalement : $$\underline{\underline{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-\frac{1}{2})^{p+4}} \leq \frac{1}{(p+3)(n-\frac{1}{2})^{p+3}}}} \quad (*)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in [\![n+1,+\infty[\![$.

$$\left| \sum_{k=n+1}^{q} \left(\frac{1}{k^{p+2}} - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}} \right) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{q} \left| \frac{1}{k^{p+2}} - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{q} \frac{(p+2)(p+3)}{24(k-\frac{1}{2})^{p+4}}$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{q} \frac{1}{k^{p+2}} - \int_{n+\frac{1}{2}}^{q+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}} \right| \leq \frac{(p+2)(p+3)}{24} \sum_{k=n+1}^{q} \frac{1}{(k-\frac{1}{2})^{p+4}} \leq \frac{(p+2)(p+3)}{24} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-\frac{1}{2})^{p+4}}$$

$(*)$

donc : $$\left| \sum_{k=n+1}^{q} \frac{1}{k^{p+2}} - \int_{n+\frac{1}{2}}^{q+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}} \right| \leq \frac{(p+2)(p+3)}{24} \times \frac{1}{p+3} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^{p+3}} = \frac{p+2}{24} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^{p+3}}$$

Ne reste plus qu'à faire tendre q vers $+\infty$, mais avant calculons $\int_{n+\frac{1}{2}}^{q+1} \frac{dt}{t^{p+2}}$

$$\int_{n+\frac{1}{2}}^{q+1/2} \frac{dt}{t^{p+2}} = \left[-\frac{t^{-p-1}}{p+1}\right]_{n+\frac{1}{2}}^{q+1/2} = \frac{1}{p+1}\left[\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^{p+1}} - \frac{1}{(q+\frac{1}{2})^{p+1}}\right]$$

En particulier : $\lim_{q\to+\infty} \int_{n+\frac{1}{2}}^{q+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}} = \frac{1}{(p+1)(n+\frac{1}{2})^{p+1}}$.

Finalement : $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} - \frac{1}{(p+1)(n+\frac{1}{2})^{p+1}} \right| \leq \frac{p+2}{24(n-\frac{1}{2})^{p+3}}$.

Ce qui s'écrit encore : $\left| A_p - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}} - \frac{1}{(p+1)(n+\frac{1}{2})^{p+1}} \right| \leq \frac{p+2}{24(n-\frac{1}{2})^{p+3}}$.

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}} + \frac{1}{(p+1)(n+\frac{1}{2})^{p+1}}$ est une valeur approchée de A_p à $\frac{p+2}{24(n-\frac{1}{2})^{p+3}}$ près.

d) Pour $p=2$

$$|A_2 - u_n| = \left|A_2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} - \frac{1}{3(n+\frac{1}{2})^3}\right| \leq \frac{4}{24(n-\frac{1}{2})^5} = \frac{1}{6(n-\frac{1}{2})^5}$$

$$|A_2 - u_n| \leq \frac{1}{6(n-\frac{1}{2})^5}.$$

Pour avoir $|A_2 - u_n| \leq 10^{-6}$ il suffit d'avoir $\frac{1}{6(n-\frac{1}{2})^5} \leq 10^{-6}$ c'est à dire

$n - \frac{1}{2} \geq \left(\frac{10^6}{6}\right)^{1/5}$ ou encore $n \geq \frac{1}{2} + \left(\frac{10^6}{6}\right)^{1/5}$

$\frac{1}{2} + \left(\frac{10^6}{6}\right)^{1/5} \simeq 11,58$

u_{12} est une valeur approchée de A_2 à 10^{-6} près.

▼ Remarques 1.. $u_{12} \simeq 1,082\ 323\ 777$ et $A_2 = \frac{\pi^4}{90} \simeq 1,082\ 323\ 234$

2.. Nous ne pouvons pas en mesure ici de trouver la valeur minimale de n telle que : $|A_2 - u_n| \leq 10^{-6}$ avec la simple majoration de c) ! Avec $A_2 = \frac{\pi^2}{90}$ on trouve pour valeur minimale 11 !!

Q2 Deuxième approximation !! Ici encore ITL donne le résultat en 5 ou 6 lignes !

a) $$\int_x^{x+\frac12}\underbrace{(t-x-\tfrac12)^4}_{u}\underbrace{g^{(4)}(t)}_{v'}dt=\Big[(t-x-\tfrac12)^4g^{(3)}(t)\Big]_x^{x+\frac12}-\int_x^{x+\frac12}4(t-x-\tfrac12)^3g^{(3)}(t)dt=-\frac1{16}g^{(3)}(x)-4\int_x^{x+\frac12}\underbrace{(t-x-\tfrac12)^3}_{u}\underbrace{g^{(3)}(t)}_{v'}dt\ ;$$

$$\int_x^{x+\frac12}(t-x-\tfrac12)^4g^{(4)}(t)dt=-\frac1{16}g^{(3)}(x)-4\Big[(t-x-\tfrac12)^3g^{(2)}(t)\Big]_x^{x+\frac12}+4\int_x^{x+\frac12}3(t-x-\tfrac12)^2g^{(2)}(t)dt\ ;$$

$$\int_x^{x+\frac12}(t-x-\tfrac12)^4g^{(4)}(t)dt=-\frac1{16}g^{(3)}(x)-\frac12g^{(2)}(x)+12\int_x^{x+\frac12}(t-x-\tfrac12)^2g^{(2)}(t)dt\ .$$

Nous sommes en mesure de donner la valeur de la dernière intégrale sans nouveaux calculs... mais attendons. De même :

$$\int_{x-\frac12}^{x}\underbrace{(t-x+\tfrac12)^4}_{u}\underbrace{g^{(4)}(t)}_{v'}dt=\Big[(t-x+\tfrac12)^4g^{(3)}(t)\Big]_{x-\frac12}^{x}-\int_{x-\frac12}^{x}4(t-x+\tfrac12)^3g^{(3)}(t)dt=\frac1{16}g^{(3)}(x)-4\int_{x-\frac12}^{x}\underbrace{(t-x+\tfrac12)^3}_{u}\underbrace{g^{(3)}(t)}_{v'}dt\ ;$$

$$\text{"}\qquad\text{"}\qquad=\frac1{16}g^{(3)}(x)-4\Big[(t-x+\tfrac12)^3g^{(2)}(t)\Big]_{x-\frac12}^{x}+4\int_{x-\frac12}^{x}3(t-x+\tfrac12)^2g^{(2)}(t)dt\ ;$$

$$\int_{x-\frac12}^{x}(t-x+\tfrac12)^4g^{(4)}(t)dt=\frac1{16}g^{(3)}(x)-\frac12g^{(2)}(x)+12\int_{x-\frac12}^{x}(t-x+\tfrac12)^2g^{(2)}(t)dt\ .$$

Par conséquent :

$$\frac1{24}\Big[\int_x^{x+\frac12}(t-x-\tfrac12)^4g^{(4)}(t)dt+\int_{x-\frac12}^{x}(t-x+\tfrac12)^4g^{(4)}(t)dt\Big]=-\frac1{24}g^{(2)}(x)+\frac12\Big[\int_{x-\frac12}^{x}(t-x+\tfrac12)^2g^{(2)}(t)dt+\int_x^{x+\frac12}(t-x-\tfrac12)^2g^{(2)}(t)dt\Big]$$

Le résultat de III Q1 donne alors :

$$\frac12\Big[\int_{x-\frac12}^{x}(t-x+\tfrac12)^2g^{(2)}(t)dt+\int_x^{x+\frac12}(t-x-\tfrac12)^2g^{(2)}(t)dt\Big]=\int_{x-\frac12}^{x+\frac12}g(t)dt-g(x).$$

On obtient alors : $$\frac1{24}\Big[\int_x^{x+\frac12}(t-x-\tfrac12)^4g^{(4)}(t)dt+\int_{x-\frac12}^{x}(t-x+\tfrac12)^4g^{(4)}(t)dt\Big]=-\frac1{24}g^{(2)}(x)+\int_{x-\frac12}^{x+\frac12}g(t)dt-g(x).$$

Ce qui pour finir donne :

$$g(x)=\int_{x-\frac12}^{x+\frac12}g(t)dt-\frac1{24}g''(x)-\frac1{24}\left(\int_x^{x+\frac12}(t-x-\tfrac12)^4g^{(4)}(t)dt+\int_{x-\frac12}^{x}(t-x+\tfrac12)^4g^{(4)}(t)dt\right).$$

Ex. : "g C^{2q} donne : $g(x)=\int_{x-\frac12}^{x+\frac12}g(t)dt-\sum_{k=1}^{q-1}\frac{1}{2^{2k}(2k+1)!}g^{(2k)}(x)-\frac{1}{(2q)!}\Big[\int_x^{x+1/2}(t-x-\tfrac12)^{2q}g^{(2q)}(t)dt+\int_{x-1/2}^{x}(t-x+\tfrac12)^{2q}g^{(2q)}(t)dt\Big]$"

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Appliquons le résultat précédent à $g : t \mapsto \frac{1}{t^{p+2}}$ sur $[k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}]$.

g est C^4 sur $[k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}]$, $\forall t \in [k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}]$, $g''(t) = \frac{(p+2)(p+3)}{t^{p+4}}$ et $g^{(4)}(t) = \frac{(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)}{t^{p+6}}$

Donc $\frac{1}{k^{p+2}} = g(k) = \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} g(t)\,dt - \frac{g''(k)}{24} - \frac{1}{24}\left[\int_k^{k+\frac{1}{2}} (t-k-\frac{1}{2})^4 g^{(4)}(t)\,dt + \int_{k-\frac{1}{2}}^{k} (t-k+\frac{1}{2})^4 g^{(4)}(t)\,dt\right]$ c'est à dire

que : $$\frac{1}{k^{p+2}} = \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{p+2}}\,dt - \frac{(p+2)(p+3)}{24\,k^{p+4}} - \frac{1}{24}\left(\int_k^{k+\frac{1}{2}} (t-k-\tfrac{1}{2})^4 \frac{(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)}{t^{p+6}}\,dt + \int_{k-\frac{1}{2}}^{k} (t-k+\tfrac{1}{2})^4 \frac{(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)}{t^{p+6}}\,dt\right)$$

$$\left|\frac{1}{k^{p+2}} - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}} + \frac{(p+2)(p+3)}{24\,k^{p+4}}\right| = \frac{(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)}{24}\left|\int_k^{k+\frac{1}{2}} \frac{(t-k-1/2)^4}{t^{p+6}}\,dt + \int_{k-\frac{1}{2}}^{k} \frac{(t-k+1/2)^4}{t^{p+6}}\,dt\right|$$

Notons que : $$\begin{cases} \forall t \in [k, k+\frac{1}{2}], \quad 0 \leq \frac{(t-k-1/2)^4}{t^{p+6}} \leq \frac{(t-k-1/2)^4}{k^{p+6}} \leq \frac{(t-k-1/2)^4}{(k-1/2)^{p+6}}. \\ \forall t \in [k-\frac{1}{2}, k], \quad 0 \leq \frac{(t-k+1/2)^4}{t^{p+6}} \leq \frac{(t-k+1/2)^4}{(k-1/2)^{p+6}}. \end{cases}$$

Donc $$\left|\int_k^{k+\frac{1}{2}} \frac{(t-k-1/2)^4}{t^{p+6}}\,dt + \int_{k-1/2}^{k} \frac{(t-k+1/2)^4}{t^{p+6}}\,dt\right| = \int_k^{k+1/2} \frac{(t-k-1/2)^4}{t^{p+6}}\,dt + \int_{k-1/2}^{k} \frac{(t-k+1/2)^4}{t^{p+6}}\,dt \leq \frac{1}{(k-1/2)^{p+6}}\left[\int_k^{k+1/2} (t-k-1/2)^4\,dt + \int_{k-\frac{1}{2}}^{k} (t-k+\tfrac{1}{2})^4\,dt\right]$$

or : $$\left|\int_k^{k+1/2} \frac{(t-k-1/2)^4}{t^{p+6}}\,dt + \int_{k-1/2}^{k} \frac{(t-k+1/2)^4}{t^{p+6}}\,dt\right| \leq \frac{1}{(k-1/2)^{p+6}}\left(\left[\frac{(t-k-1/2)^5}{5}\right]_k^{k+1/2} + \left[\frac{(t-k+1/2)^5}{5}\right]_{k-1/2}^{k}\right)$$

$$\leq \frac{1}{(k-1/2)^{p+6}}\left[-\frac{(-1/2)^5}{5} + \frac{(1/2)^5}{5}\right] = \frac{1}{(k-1/2)^{p+6}} \times \frac{2}{2^5 \times 5} = \frac{1}{80(k-1/2)^{p+6}}$$

Nous pouvons maintenant conclure.

$$\left|\frac{1}{k^{p+2}} - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}} + \frac{(p+2)(p+3)}{24\,k^{p+4}}\right| \leq \frac{(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)}{24} \times \frac{1}{80(k-\frac{1}{2})^{p+6}} \quad \text{ie :}$$

$$\left|\frac{1}{k^{p+2}} - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}} + \frac{(p+2)(p+3)}{24\,k^{p+4}}\right| \leq \frac{(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)}{1920\,(k-\frac{1}{2})^{p+6}} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

c) Il ne reste plus qu'à sommer de $n+1$ à $+\infty$ et à trouver un majorant du majorant ! Commençons par cela.

▼▲ $v : t \mapsto \dfrac{1}{(t-\frac{1}{2})^{p+6}}$ est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$

La série de terme général $v(k)$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} v(t)\,dt$

Or $v(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{p+6}}$. La convergence de $\int_1^{+\infty}\dfrac{dt}{t^{p+6}}$ ($p+6>1$ + Riemann !) et la positivité de v

montre la convergence de $\int_1^{+\infty} v(t)\,dt$ et la convergence de la série de terme général $v(k)$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $q\in [\![n+1,+\infty[\![$

$$\forall k\in[\![n+1,q]\!],\ \frac{1}{(k-\frac{1}{2})^{6}} = v(k) = \int_{k-1}^{k} v(k)\,dt \underset{v \text{ décroissante}}{\le} \int_{k-1}^{k} v(t)\,dt = \int_{k-1}^{k}\frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^{p+6}}$$

donc
$$\sum_{k=n+1}^{q}\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^{6}} \le \sum_{k=n+1}^{q}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^{p+6}} = \int_{n}^{q}\frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^{p+6}} = -\frac{1}{p+5}\left[\frac{1}{(t-\frac{1}{2})^{p+5}}\right]_n^q = \frac{1}{p+5}\left[\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^{p+5}}-\frac{1}{(q-\frac{1}{2})^{p+5}}\right]$$

En faisant tendre q vers $+\infty$ il vient :

$$\underline{\underline{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^{p+6}} \le \frac{1}{p+5}\,\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^{p+5}}}}.$$

> ▼▲ **Remarque..** On pouvait obtenir directement ce résultat en remplaçant p par $p+2$ dans la première inégalité de III 1. c) !! ▼▲

$$\left|\sum_{k=n+1}^{q}\left(\frac{1}{k^{p+2}}-\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\frac{dt}{t^{p+2}}+\frac{(p+2)(p+3)}{24\,k^{p+4}}\right)\right| \le \sum_{k=n+1}^{q}\left|\frac{1}{k^{p+2}}-\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\frac{dt}{t^{p+2}}+\frac{(p+2)(p+3)}{24\,k^{p+4}}\right| \le \sum_{k=n+1}^{q}\frac{(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)}{1920\,(k-\frac{1}{2})^{p+6}}$$

donc
$$\left|\sum_{k=n+1}^{q}\frac{1}{k^{p+2}}-\int_{n+\frac{1}{2}}^{q+\frac{1}{2}}\frac{dt}{t^{p+2}}+\frac{(p+2)(p+3)}{24}\sum_{k=n+1}^{q}\frac{1}{k^{p+4}}\right| \le \frac{(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)}{1920}\sum_{k=n+1}^{q}\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^{p+6}}$$

Notons que : $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^{p+2}}$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^{p+4}}$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{(k-\frac{1}{2})^{p+6}}$ existent.

De plus
$$\lim_{q\to+\infty}\int_{n+\frac{1}{2}}^{q+1/2}\frac{dt}{t^{p+2}} = \lim_{q\to+\infty}\frac{1}{p+1}\left[\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^{p+1}}-\frac{1}{(q+\frac{1}{2})^{p+1}}\right] = \frac{1}{(p+1)(n+\frac{1}{2})^{p+1}}$$

En faisant tendre q vers $+\infty$ dans la dernière inégalité et en majorant $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{(k-\frac{1}{2})^{p+6}}$ par $\dfrac{1}{p+5}\,\dfrac{1}{(n-\frac{1}{2})^{p+5}}$ il vient :

$$\underline{\underline{\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^{p+2}}-\frac{1}{(p+1)(n+\frac{1}{2})^{p+1}}+\frac{(p+2)(p+3)}{24}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^{p+4}}\right| \le \frac{(p+2)(p+3)(p+4)}{1920\,(n-\frac{1}{2})^{p+5}}}}.$$

$$|A_p - U_n| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}} - \frac{1}{(p+1)(n+\frac{1}{2})^{p+1}} + \frac{p+2}{24(n+\frac{1}{2})^{p+3}} \right|$$

$$|A_p - U_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} - \frac{1}{(p+1)(n+\frac{1}{2})^{p+1}} + \frac{(p+2)(p+3)}{24} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+4}} - \frac{(p+2)(p+3)}{24} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+4}} + \frac{(p+2)}{24(n+\frac{1}{2})^{p+3}} \right|$$

$$|A_p - U_n| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} - \frac{1}{(p+1)(n+\frac{1}{2})^{p+1}} + \frac{(p+2)(p+3)}{24} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+4}} \right| + \frac{(p+2)(p+3)}{24} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+4}} - \frac{1}{(p+3)(n+\frac{1}{2})^{p+3}} \right|$$

$$|A_p - U_n| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{III 1.c} \\ \text{III 2.c}}}{\leq} \underbrace{\frac{(p+2)(p+3)(p+4)}{1920(n-\frac{1}{2})^{p+5}}}_{\text{III.2c}} + \underbrace{\frac{(p+2)(p+3)}{24} \frac{(p+4)}{24(n-\frac{1}{2})^{p+5}}}_{\text{III 1.c en remplaçant } p \text{ par } p+2 \text{ dans la dernière inégalité de la page 3}} = \frac{13}{5760} \frac{(p+2)(p+3)(p+4)}{(n-\frac{1}{2})^{p+5}}$$

Donc $|A_p - U_n| \leq \dfrac{13}{5760} \dfrac{(p+2)(p+3)(p+4)}{(n-\frac{1}{2})^{p+5}}$.

e) Exemple. $p=0$. Alors $|A_0 - U_n| \leq \dfrac{13}{240} \dfrac{1}{(n-\frac{1}{2})^5}$

$$\frac{13}{240} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^5} \leq 10^{-6} \iff n - \frac{1}{2} \geq \left(\frac{13 \times 10^6}{240}\right)^{1/5} \iff n \geq \frac{1}{2} + \left(\frac{13 \times 10^6}{240}\right)^{1/5}$$

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{13 \times 10^6}{240}\right)^{1/5} \simeq 9{,}35.$$

U_{10} est une valeur approchée de A_0 à 10^{-6} près.

$p=2$. Alors $|A_2 - U_n| \leq \dfrac{13}{48} \dfrac{1}{(n-\frac{1}{2})^7}$.

$$\frac{13}{48} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^7} \leq 10^{-6} \iff n \geq \frac{1}{2} + \left(\frac{13}{48} \times 10^6\right)^{1/7} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} + \left(\frac{13}{48} \times 10^6\right)^{1/7} \simeq 6{,}47$$

U_7 est une valeur approchée de A_2 à 10^{-6} près.

<u>Remarques</u>.. 1. La fonction <u>Gamma</u> est, $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$.

La fonction <u>zêta</u> est, $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Notons que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et ζ sur $]1,+\infty[$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(p) = (p-1)!$

A la partie II nous avons obtenu : $\forall p \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x-1}\,dx = (p+1)! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}}$

Ceci s'écrit encore : $\forall p \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x-1}\,dx = \Gamma(p+2)\,\zeta(p+2)$ ou :

$\forall p \in [\![2,+\infty[\![\quad \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{e^x-1}\,dx = \Gamma(p)\,\zeta(p)$. Plus généralement on peut montrer que :

$\forall \alpha \in]1,+\infty[,\ \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}\,dx = \Gamma(\alpha)\,\zeta(\alpha)$. (Voir les exercices sur les intégrales généralisées).

2.. Retrouvons le résultat de III Q1 en quelques lignes. Soit G une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $g : t \mapsto \frac{1}{t^{p+2}}$. G est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ G'(t) = g(t) = \frac{1}{t^{p+2}},\ G''(t) = -\frac{p+2}{t^{p+3}}$ et $G'''(t) = \frac{(p+2)(p+3)}{t^{p+4}}$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à G, à l'ordre 2

→ sur $[k, k+\frac{1}{2}]$ donne : $\left|G(k+\tfrac{1}{2}) - G(k) - (k+\tfrac{1}{2}-k)G'(k) - \frac{(k+\frac{1}{2}-k)^2}{2}G''(k)\right| \leq \frac{|k+\frac{1}{2}-k|^3}{3!} \max_{t\in[k,k+\frac{1}{2}]} |G'''(t)|$ (1)

→ sur "$[k, k-\frac{1}{2}]$" donne : $\left|G(k-\tfrac{1}{2}) - G(k) - (k-\tfrac{1}{2}-k)G'(k) - \frac{(k-\frac{1}{2}-k)^2}{2}G''(k)\right| \leq \frac{|k-\frac{1}{2}-k|^3}{3!} \max_{t\in[k-\frac{1}{2},k]} |G'''(t)|$ (2)

(1) signifie que : $\left|\int_k^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}} - \frac{1}{2k^{p+2}} - \frac{1}{8}G''(k)\right| \leq \frac{1}{48} \max_{t\in[k,k+\frac{1}{2}]} \frac{(p+2)(p+3)}{t^{p+4}} = \frac{(p+2)(p+3)}{48(k)^{p+4}} \leq \frac{(p+2)(p+3)}{48(k-\frac{1}{2})^{p+4}}$

(2) signifie que : $\left|\int_k^{k-\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}} + \frac{1}{2k^{p+2}} - \frac{1}{8}G''(k)\right| \leq \frac{1}{48} \max_{t\in[k-\frac{1}{2},k]} \frac{(p+2)(p+3)}{t^{p+4}} = \frac{(p+2)(p+3)}{48(k-\frac{1}{2})^{p+4}}$

$$\left|\frac{1}{k^{p+2}} - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}}\right| = \left|\int_k^{k-\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}} + \frac{1}{2k^{p+2}} - \frac{1}{8}G''(k) - \left(\int_k^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}} - \frac{1}{2k^{p+2}} - \frac{1}{8}G''(k)\right)\right|$$

$$\left|\frac{1}{k^{p+2}} - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}}\right| \underset{\text{IN-ÉG TRIANG}}{\leq} \left|\int_{k-\frac{1}{2}}^{k} \frac{dt}{t^{p+2}} + \frac{1}{2k^{p+2}} - \frac{1}{8}G''(k)\right| + \left|\int_k^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}} - \frac{1}{2k^{p+2}} - \frac{1}{8}G''(k)\right| \leq 2 \times \frac{(p+2)(p+3)}{48(k-\frac{1}{2})^{p+4}}$$

ce qui donne clairement le résultat. Un grand bravo encore pour le concepteur.