CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES I

OPTION GENERALE

samedi 20 mai 1995, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Sont autorisées: – Règles graduées.
Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm x 15 cm de large, sans limitation de nombre.

L'objet du problème est l'étude de la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par les relations :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{si} \quad x > 0\,, \quad f(0) = 1\,.$$

Dans la partie II, on établit l'existence des *moments* $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^p f(x)dx$ où p est un entier naturel, puis on exprime ces moments en fonction des séries $A_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}}$.

Dans la partie III, on établit un procédé d'approximation des nombres A_p.

PARTIE I.

1. a) Étudier la continuité de f sur $[0,+\infty[$.
   b) Quelle est la limite de f en $+\infty$?

2. a) Calculer la dérivée f' de f sur $]0,+\infty[$.
   b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
   c) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $[0,+\infty[$?

3. Étudier les variations de la fonction φ définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 - x - e^{-x}$$

En déduire le signe de $f'(x)$.

4. Étudier les variations de la fonction ψ définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\psi(x) = (x + 2) + (x - 2)\, e^{x}$$

En déduire le signe de $f''(x)$ pour $x > 0$.

5. Donner une représentation graphique de f.

PARTIE II.

Dans cette partie et jusqu'à la fin du problème, p désigne un entier naturel.

1. Dans cette question, λ est un réel strictement positif.

a) Établir la convergence de l'intégrale :

$$K(p,\lambda) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-\lambda x} dx$$

et calculer $K(0,\lambda)$.

b) Établir une relation simple entre $K(p, \lambda)$ et $K(p + 1, \lambda)$
[On utilisera une intégration par parties].

c) En déduire par récurrence la valeur de $K(p, \lambda)$.

2. a) Montrer que, pour $x \in [0, +\infty[$,

$$f(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$$

b) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^p f(x) dx$ converge.

Dans toute la suite du problème, on pose :

$$I_p = \int_0^{+\infty} x^p f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1} dx$$

3. Calcul de I_p.

a) Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}}$. On note

$$A_p = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}}$$

b) Pour $x \in]0, +\infty[$ et n entier supérieur ou égal à 1, établir que

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{k=1}^{n} e^{-kx} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}$$

c) En déduire que :

$$I_o = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \int_0^{+\infty} f(x) e^{-nx} dx$$

d) Exprimer I_o à l'aide de A_o.

e) En adaptant la méthode précédente, exprimer I_p en fonction de A_p.

PARTIE III.

On étudie une méthode de calcul approché de A_p.

1. *Première approximation*

a) Soit x un nombre réel et g une fonction de classe C^2 définie sur $\left[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right]$ à valeurs réelles. Établir la relation :

$$g(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} g(t)dt - \frac{1}{2}\int_{x}^{x+\frac{1}{2}} (t - x - \frac{1}{2})^2 g''(t)dt - \frac{1}{2}\int_{x-\frac{1}{2}}^{x} (t - x + \frac{1}{2})^2 g''(t)dt$$

[On pourra intégrer par parties les deux dernières intégrales apparaissant dans la formule].

b) En déduire que pour k entier supérieur ou égal à 1 on a :

$$\left| \frac{1}{k^{p+2}} - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}} \right| \leq \frac{(p+2)(p+3)}{24 (k - \frac{1}{2})^{p+4}}$$

c) Soit n un entier supérieur ou égal à 1 ; montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k - \frac{1}{2})^{p+4}} \leq \frac{1}{(p+3)(n - \frac{1}{2})^{p+3}}$$

et en déduire, à l'aide de (b), que :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} - \frac{1}{(p+1)(n + \frac{1}{2})^{p+1}} \right| \leq \frac{p+2}{24 (n - \frac{1}{2})^{p+3}}$$

d) Exemple. On pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} + \frac{1}{3(n+\frac{1}{2})^3}$$

Proposer un majorant de $|A_2 - u_n|$.

Pour quelle valeur minimale de n peut-on affirmer que : $|A_2 - u_n| \leq 10^{-6}$?

2. *Deuxième approximation*

a) On reprend les notations et les hypothèses de la question (III-1.a) et on suppose de plus que g est de classe C^4. Montrer que :

$$g(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} g(t)dt - \frac{g''(x)}{24} - \frac{1}{24}\left(\int_{x}^{x+\frac{1}{2}} (t-x-\frac{1}{2})^4 g^{(4)}(t)dt + \int_{x-\frac{1}{2}}^{x} (t-x+\frac{1}{2})^4 g^{(4)}(t)dt\right)$$

b) En déduire que pour k entier supérieur ou égal à 1 :

$$\left|\frac{1}{k^{p+2}} - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}} + \frac{(p+2)\,(p+3)}{24\,k^{p+4}}\right| \leq \frac{(p+2)\,(p+3)\,(p+4)\,(p+5)}{1.920\left(k-\frac{1}{2}\right)^{p+6}}$$

c) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} - \frac{1}{(p+1)\,(n+\frac{1}{2})^{p+1}} + \frac{(p+2)\,(p+3)}{24} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+4}}\right| \leq \frac{(p+2)\,(p+3)\,(p+4)}{1.920\,(n-\frac{1}{2})^{p+5}}$$

d) Pour n entier supérieur ou égal à 1, on pose :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}} + \frac{1}{(p+1)\,(n+\frac{1}{2})^{p+1}} - \frac{p+2}{24(n+\frac{1}{2})^{p+3}}$$

En utilisant les résultats des questions III.1.c) et III.2.c) proposer un majorant de $|A_p - v_n|$.

e) Exemple. On fait $p = 0$. Pour quelle valeur minimale de n peut-on affirmer que :

$$|A_o - v_n| \leq 10^{-6} \text{ ?}$$

FIN