CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

mardi 29 avril 1997, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Seules sont autorisées: *Une règle graduée.*
*Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à **fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.***

Le problème traite de quelques propriétés des polynômes de HERMITE qui constituent une famille orthogonale pour un certain produit scalaire qui sera étudié dans ce problème .
On notera $\mathbb{R}[X]$ (resp.$\mathbb{R}_n[X]$) l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels (resp. l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n) y compris le polynôme nul.
Pour tout entier naturel k le polynôme X^k se confond avec la fonction polynomiale réelle $x \mapsto x^k$, en particulier X^0 est la fonction constante égale à 1.
On notera $[x]$ la partie entière d'un réel x.
Enfin on rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

Partie I

Trois résultats utiles par la suite.

1) a) Pour tout entier naturel n, justifier la convergence de l'intégrale

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

b) Etablir, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'égalité : $I_n = (n-1)\, I_{n-2}$.

c) Soit n un entier naturel. Donner la valeur de I_{2n+1} et montrer que $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

d) Pour toute fonction polynomiale P, justifier la convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

2) On rappelle que si une suite de terme général v_n est telle que les deux sous-suites de termes généraux v_{2n} et v_{2n+1} convergent vers le même réel l alors la suite (v_n) est elle-même convergente de limite l.

Soit C un réel positif. Pour tout entier naturel n on pose $u_n = \dfrac{C^n}{[\frac{n}{2}]!}$.

a) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{C^{2n}}{n!}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

b) Montrer que la série de terme général $u_{2k} + u_{2k+1}$ (où $k \in \mathbb{N}$) converge et donner sa somme.

c) En déduire la convergence de la série de terme général u_n et la valeur de la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

3) Soit a un réel strictement positif et soit g une fonction réelle indéfiniment dérivable sur $[-a, a]$ pour laquelle existe un réel positif K tel que, pour tout entier n :

$$\underset{t\in[-a,a]}{Max} |g^{(n)}(t)| \leqslant \frac{K^n n!}{[\frac{n}{2}]!}$$

a) Montrer que pour tout $\lambda \in [-a, a]$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^\lambda \frac{(\lambda - t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt = 0$$

b) En déduire l'égalité suivante, valable pour tout $\lambda \in [-a, a]$:

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n$$

Quelle simplification obtient-on si g coïncide sur $[-a, a]$ avec une fonction polynomiale de degré d ?

PARTIE II

Les polynômes de Hermite.

1) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} P(x)Q(x)\, dx$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On notera $\|.\|$ la norme associée.

Ainsi si n est un entier naturel, la restriction de ce produit scalaire aux polynômes de degré au plus n fait de $(\mathbb{R}_n[X], \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien.

2) A l'aide de la base $(1, X, X^2, X^3)$ construire une base orthogonale de $(\mathbb{R}_3[X], \langle .,. \rangle)$ formée de polynômes dont le coefficient de plus haut degré est 1.

Pour tout entier naturel n on considère l'application H_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} (e^{\frac{-x^2}{2}})^{(n)}$$

où selon l'usage $f^{(n)}(x)$ désigne la valeur en x de la dérivée $n^{i\grave{e}me}$ de f (en particulier $f^{(0)}(x) = f(x)$).

3) a) Pour tout réel x calculer $H_0(x), H_1(x), H_2(x), H_3(x)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir les relations

$$H_{n+1} = XH_n - nH_{n-1} \qquad (1)$$

et

$$H'_n = nH_{n-1} \qquad (2)$$

Pour établir (1)*on pourra remarquer que* $(e^{\frac{-x^2}{2}})^{(n+1)} = (-xe^{\frac{-x^2}{2}})^{(n)}$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est une fonction polynomiale dont on précisera, en fonction de n, le degré, la parité et le coefficient de plus haut degré.

4) On dispose du

Type

Poly = **array**[0..20] **of integer** ;

On nommera de la même façon un polynôme de degré au plus 20 et la variable de type Poly obtenue en stockant dans la case numéro k, $0 \leqslant k \leqslant 20$, le coefficient de X^k dudit polynôme.

a) Ecrire la partie instruction (i.e. sans les déclarations) d'une procédure PASCAL dont l'en-tête est

Procedure MULTIX (P, **Var** Q :Poly) ;

qui stocke dans Q les coefficients du polynôme XP, P étant un polynôme de degré au plus 19.

b) A l'aide de (1) écrire la partie instruction d'une procédure PASCAL dont l'en-tête est

Procedure HERMITE (n :**integer** ;**Var** H :Poly) ;

qui, étant donné un entier $n, 2 \leqslant n \leqslant 20$, stocke les coefficients de H_n dans une variable de **Type** Poly.

PARTIE III

$(H_n)_{n\geqslant 0}$ comme famille de polynômes orthogonaux.

1) a) Montrer que si P est un polynôme et n un entier naturel non nul alors $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x)(e^{-\frac{x^2}{2}})^{(n-1)} = 0$. De même on montrerait et **on admet** que $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x)(e^{-\frac{x^2}{2}})^{(n-1)} = 0$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ calculer

$$\langle H_n, H_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Pour n non nul on utilisera la définition de H_n.

c) Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. En remarquant que

$$\langle H_n, H_m \rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) (e^{-\frac{x^2}{2}})^{(n)} dx$$

et à l'aide d'une intégration par parties qu'on effectuera avec soin montrer que

$$\langle H_n, H_m \rangle = m \langle H_{n-1}, H_{m-1} \rangle$$

En déduire que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut $\langle H_n, H_n \rangle$?

2) a) Soit $k \in \mathbb{N}$ et R une fonction polynomiale de degré au plus k ; Que vaut $\langle H_{k+1}, R \rangle$?

b) Soit n un entier naturel, k un entier vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$ et P un polynôme de degré au plus k. Etablir l'égalité

$$\left\|X^{k+1} - P\right\|^2 = \|H_{k+1}\|^2 + \|Q - P\|^2$$

où $Q = X^{k+1} - H_{k+1}$. *On pourra calculer $\langle H_{k+1}, Q - P \rangle$.*

Quelle est, dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}_{n+1}[X], \langle .,. \rangle)$, la projection orthogonale de X^{k+1} sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$?

c) On note $(G_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ la famille orthonormale de $(\mathbb{R}_{n+1}[X], \langle .,. \rangle)$obtenue par le procédé de SCHMIDT à partir de la base $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$. Pour tout $k, 0 \leqslant k \leqslant n+1$, déterminer G_k en fonction de $H_0, H_1, \ldots, H_{n+1}$.

PARTIE IV

Un développement en série de Hermite.

Soit n un entier naturel non nul.

1) Soit P un polynôme de degré au plus n. Justifier l'égalité suivante :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \langle P, H_k \rangle \, \frac{H_k}{k!}$$

2) Pour tout couple (b, c) de réels vérifiant $b \leqslant c$ on **admet** qu'il existe un réel K (dépendant de b et c) tel que pour tout entier n et tout $x \in [b, c]$:

$$\left|\frac{H_n(x)}{n!}\right| \leqslant \frac{K^n}{[\frac{n}{2}]!}$$

a) Soit x un réel donné. A l'aide du 2) de la partie I établir, pour tout réel λ, la convergence de la série de terme général $\dfrac{H_n(x)}{n!}\lambda^n$.

b) Soit g_x (x est toujours un réel fixé) la fonction définie pour tout réel λ par $g_x(\lambda) = e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}}$.

Pour tout réel λ et tout entier naturel n calculer $g_x^{(n)}(\lambda)$(c'est-à-dire $\dfrac{d^n g_x}{d\lambda^n}(\lambda)$) en fonction de H_n.

Montrer que g_x vérifie les hypothèses du 3) de la partie I et en déduire que pour tout $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2$

$$e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\lambda^n$$

c) On note exp la fonction $x \mapsto e^x$. Pour tout entier naturel n justifier rapidement la convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

dont, par analogie, on note $\langle \exp, H_n \rangle$ la valeur. Calculer $\langle \exp, H_n \rangle$ puis,pour tout réel x, conclure à l'égalité

$$\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle \exp, H_n \rangle \ \frac{H_n(x)}{n!}$$

Pour calculer $\langle \exp, H_n \rangle$ on pourra utiliser la définition de H_n et intégrer par parties (avec soin) afin d'obtenir $\langle \exp, H_n \rangle = \langle \exp, H_{n-1} \rangle$.

PARTIE I Trois résultats utiles par la suite !

(Q1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = |x|^n e^{-x^2/2}$

f_n est continue, positive et paire sur $\mathbb{R}$; en particulier f_n est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. f_n étant paire sur $\mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ et $\int_{-\infty}^0 f_n(x)dx$ sont de même nature. Etudions donc la convergence de la première intégrale.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 f_n(x)) \underset{\uparrow}{=} 0$. $\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in [A, +\infty[$, $0 \leq x^2 f_n(x) \leq 1$.

croissance comparée.

$\forall x \in [A, +\infty[$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{x^2}$. La positivité de f_n et la convergence de $\int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ donnent la convergence de $\int_A^{+\infty} f_n(x)dx$. et donc de $\int_0^{+\infty} |x|^n e^{-x^2/2} dx$.

Par parité, $\int_{-\infty}^0 |x|^n e^{-x^2/2} dx$ converge également. Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n e^{-x^2/2} dx$ converge, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$ est absolument convergente donc convergente.

Ceci achève de prouver la convergence de $I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

<u>Remarques</u>. 1. On aurait pu se ramener à la fonction Γ en remarquant que : $\forall x \in [2, +\infty[$, $x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \leq x^n e^{-x}$.

2.. $x \mapsto x^n e^{-x^2/2}$ ayant la parité de n sur $\mathbb{R}$ nous pouvons dire que

si n est pair : $I_n = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$ et si n est impair : $I_n = 0$!

b) Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Soit $n \in [2, +\infty[$.

$$\int_A^B x^n e^{-x^2/2} dx = \int_A^B \underset{u}{(-x^{n-1})} \underset{v'}{(-x e^{-x^2/2})} dx \overset{\text{I.P.P.}}{=} [-x^{n-1} e^{-x^2/2}]_A^B - \int_A^B [-(n-1)x^{n-2}] e^{-x^2/2} dx$$

$$\int_A^B x^n e^{-x^2/2} dx = A^{n-1} e^{-A^2/2} - B^{n-1} e^{-B^2/2} + (n-1) \int_A^B x^{n-2} e^{-x^2/2} dx$$

En faisant tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$ on obtient : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2/2} dx = (n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-2} e^{-x^2/2} dx$

car ces deux intégrales convergent et $\lim\limits_{A \to -\infty} (A^{n-1} e^{-A^2/2}) = \lim\limits_{B \to +\infty} (B^{n-1} e^{-B^2/2}) = 0$.

En multipliant par $1/\sqrt{2\pi}$ il vient : $\underline{\underline{I_n = (n-1) I_{n-2}}}$.

c] Soit $n \in \mathbb{N}$. $x \mapsto x^{2n+1}e^{-x^2/2}$ étant impaire sur $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2/2}\,dx = 0$ donc $I_{2n+1} = 0$.

A ne pas faire sur la copie car le texte donne ce résultat

$$I_{2n} = (2n-1)I_{2n-2} = (2n-1)(2n-3)I_{2n-4} = (2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 3\times 1\, I_0$$

$$I_{2n} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots \times 4\times 3\times 2\times 1}{(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots \times 4\times 2}\times 1 = \frac{(2n)!}{(2\times n)(2\times(n-1))\cdots(2\times 2)(2\times 1)}$$

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Montrons ce résultat par récurrence.

- C'est clair pour $n=0$ car $I_0 = 1$ et $\dfrac{(2\times 0)!}{2^0\times 0!} = \dfrac{1}{1\times 1} = 1$!
- Supposons l'égalité vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons-la pour $n+1$.

$$I_{2n+2} = (2n+1)I_{2n} \overset{HR}{=} (2n+1)\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2(n+1)2^n n!} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}$$; ce qui achève la récurrence.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{2n+1} = 0$ et $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

Remarques.. 1.. Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. φ est une densité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale centrée réduite. Ce qui précède montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X possède un moment $m_n(X)$ d'ordre n et que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $m_{2n+1}(X) = 0$ et $m_{2n}(X) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$ ... ce qui n'est pas nouveau.

2.. $I_{2n+1} = 0$ peut s'obtenir avec "$I_1 = m_1(X) = E(X) = 0$" et $I_{2n+1} = (2n)(2n-2)\cdots 2\, I_1$.

d] Soit P une fonction polynômiale. $\exists q \in \mathbb{N}$, $\exists (a_0, a_1, \ldots, a_q) \in \mathbb{R}^{q+1}$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)e^{-x^2/2} = \sum_{k=0}^{q} a_k x^k e^{-x^2/2}$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-x^2/2}\,dx$ converge donc $\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{q} a_k x^k e^{-x^2/2}\,dx$ converge et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)e^{-x^2/2}\,dx$ aussi !

Q2 a] Le cours indique que pour tout réel x la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge ; par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{n!} = 0$; en particulier $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{(C^2)^n}{n!}\right) = 0$

Finalement : $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{C^{2n}}{n!} = 0$.

Retrouvons ce dernier résultat à la main dans le cas où $C \in \mathbb{R}_+^*$ (si $C = 0$ ... !)

Posons $v_n = C^{2n}/n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{C^2}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0$ donc $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq \dfrac{1}{2}$ ...on peut prendre directement $p = E(2C^2)$.

$\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $0 \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n$. Une récurrence simple donne alors : $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $0 \leq v_n \leq \dfrac{v_p}{2^{n-p}}$

Le reste est clair !

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \dfrac{C^{2n}}{\left[\frac{2n}{2}\right]!} = \dfrac{C^{2n}}{n!} = v_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = \dfrac{C^{2n+1}}{\left[\frac{2n+1}{2}\right]!} = C\,\dfrac{C^{2n}}{n!} = C v_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$.

b) $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} + u_{2k+1} = \dfrac{C^{2k}}{k!} + \dfrac{C^{2k+1}}{k!} = (1+C)\,\dfrac{(C^2)^k}{k!}$.

La série de terme général $\dfrac{(C^2)^k}{k!}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(C^2)^k}{k!} = e^{C^2}$

Par conséquent la série de terme général $u_{2k} + u_{2k+1}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (u_{2k} + u_{2k+1}) = (1+C)e^{C^2}$.

c) Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i$

. $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} = \displaystyle\sum_{i=0}^{2n} u_i = \sum_{k=0}^{n} u_{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} u_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k} + u_{2k+1}) + u_{2n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k} + u_{2k+1}) = (1+C)e^{C^2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = (1+C)e^{C^2}$

. $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = (1+C)e^{C^2} + 0 = (1+C)e^{C^2}$.

Le rappel nous donne alors la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ et sa limite : $(1+C)e^{C^2}$

Donc la série de terme général u_n converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = (1+C)e^{C^2}$.

Q3 Avant de résoudre regardons !

g est C^∞ sur $[0,a]$ donc la formule de Taylor avec reste intégrale donne :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \lambda \in [0,a]$, $g(\lambda) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda-0)^k}{k!} g^{(k)}(0) + \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} g^{(n)}(t)\,dt$

De là on tout est clair : $g(\lambda) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{g^{(\ell)}(0)}{\ell!} \lambda^\ell \iff \lim_{n\to+\infty} \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} g^{(n)}(t)\,dt = 0$

<u>Remarque</u>.. Victor avait de démontrer que l'inégalité de Taylor-Lagrange permet d'obtenir plus rapidement le résultat du <u>b]</u>. En effet :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall \lambda\in[-a,a],\quad \left|g(\lambda) - \sum_{\ell=0}^{n} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} g^{(\ell)}(0)\right| \leq \frac{|\lambda|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{u\in[0,\lambda]} |g^{(n+1)}(u)| \leq \frac{|\lambda|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{u\in[-a,a]} |g^{(n+1)}(u)|$$

donc $\forall n\in\mathbb{N}, \forall\lambda\in[-a,a],\ \left|g(\lambda) - \sum_{\ell=0}^{n} \frac{g^{(\ell)}(0)}{\ell!}\lambda^\ell\right| \leq \frac{|\lambda|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{K^{n+1}(n+1)!}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!} = \frac{(|\lambda|K)^{n+1}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!} = \dots u_{n+1}$ avec $c = |\lambda|K$

Le reste est clair. Mais réinventons la roue.

<u>a]</u> Soit $\lambda\in[-a,a]$ et soit $n\in\mathbb{N}$. Distinguons deux cas.

<u>1er cas</u>.. $\lambda \geq 0$

$$\left|\int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\,dt\right| \leq \int_0^\lambda \frac{|\lambda-t|^n}{n!} |g^{(n+1)}(t)|\,dt \leq \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} \frac{K^{n+1}(n+1)!}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!}\,dt$$

$$\left|\int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\,dt\right| \leq \frac{K^{n+1}(n+1)!}{n!\left[\frac{n+1}{2}\right]!} \left[-\frac{(\lambda-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^\lambda = \frac{K^{n+1}(n+1)}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!} \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} \overset{\lambda\geq 0}{=} \frac{K^{n+1}|\lambda|^{n+1}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!}$$

<u>2ième cas</u>.. $\lambda < 0$

$$\left|\int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\,dt\right| = \left|\int_\lambda^0 \frac{(\lambda-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\,dt\right| \leq \int_\lambda^0 \frac{|\lambda-t|^n}{n!} |g^{(n+1)}(t)|\,dt \leq \frac{K^{n+1}(n+1)!}{n!\left[\frac{n+1}{2}\right]!} \int_\lambda^0 (t-\lambda)^n\,dt$$

$$\left|\int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\,dt\right| \leq \frac{K^{n+1}(n+1)}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!} \left[\frac{(t-\lambda)^{n+1}}{n+1}\right]_\lambda^0 = \frac{K^{n+1}(-\lambda)^{n+1}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!} = \frac{K^{n+1}|\lambda|^{n+1}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!}$$

Finalement : $\forall\lambda\in[-a,a],\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|\int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\,dt\right| \leq \frac{(K|\lambda|)^{n+1}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!}$

Or d'après : $\lim_{n\to+\infty} \frac{(K|\lambda|)^{n+1}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!} = 0$; par conséquent :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\,dt = 0 \quad \text{et ceci pour tout } \lambda\in[-a,a].}$$

b) Soit $\lambda \in [-a,a]$. g étant C^∞ sur $[-a,a]$, Taylor avec reste intégral donne :

$$g(\lambda) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda-0)^k}{k!} g^{(k)}(0) = \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\,dt \quad \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\,dt = 0 \quad \text{donne alors} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \lambda^k = g(\lambda).$$

Par conséquent pour tout réel λ appartenant à $[-a,a]$:

1°.. la série de terme général $\frac{g^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n$ converge

2°.. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n = g(\lambda)$.

Supposons que g coïncide sur $[-a,a]$ avec une fonction polynômiale de degré d ; alors $g^{(n)}$ est nulle sur $[a,a]$ dès que $n \in [\![d+1,+\infty[\![$; on a alors :

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{d} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n \quad \text{... c'est Taylor pour les polynômes !}$$

PARTIE II LES POLYNOMES de HERMITE

(Q1) Remarquons que si P et Q sont deux éléments de $\mathbb{R}[X]$, PQ est polynômiale (!) et donc $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} P(x)Q(x)\,dx$ converge.

• Soit $(P,Q,R)\in\mathbb{R}[X]^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. chacune des intégrales converge.

$\langle P,\lambda Q+R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} P(x)(\lambda Q(x)+R(x))\,dx \overset{\downarrow}{=} \lambda\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}P(x)Q(x)\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}P(x)R(x)\,dx$

donc $\underline{\langle P,\lambda Q+R\rangle = \lambda\langle P,Q\rangle+\langle P,R\rangle}$.

• Soit $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$. $\langle Q,P\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}Q(x)P(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}P(x)Q(x)\,dx = \langle P,Q\rangle$.

$\underline{\langle Q,P\rangle = \langle P,Q\rangle}$.

• Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-x^2/2}P(x)P(x) = e^{-x^2/2}(P(x))^2 \geqslant 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}P(x)P(x)\,dx\geqslant 0$

Ceci donne : $\underline{\langle P,P\rangle \geqslant 0}$.

Supposons $\langle P,P\rangle = 0$.

Alors $h : x\mapsto e^{-x^2/2}P(x)P(x)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx = 0$.

Par conséquent h est nulle sur $\mathbb{R}$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-x^2/2}(P(x))^2 = 0$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)=0$. $\underline{\langle P,P\rangle = 0 \Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}}$.

$\underline{\text{L'application } (P,Q)\to\langle P,Q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}P(x)Q(x)\,dx \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$

(Q2) Utilisons le procédé d'orthogonalisation de Schmidt

Posons $\underline{P_0 = 1}$.

Cherchons alors un réel α pour que $P_1 = X+\alpha P_0$ soit orthogonal à P_0.

$\langle X+\alpha P_0, P_0\rangle = \langle X,1\rangle + \alpha\langle 1,1\rangle = I_1+\alpha I_0 = \alpha$ $\quad (I_1 = 0$ et $I_0 = 1)$

Par conséquent $X+\alpha P_0$ est orthogonal à P_0 ssi $\alpha = 0$. Posons alors $\underline{P_1 = X}$.

Cherchons $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ pour que $X^2+aP_0+bP_1$ soit orthogonal à P_0 et P_1.

$\langle X^2+aP_0+bP_1, P_0\rangle = \langle X^2,1\rangle + a\langle 1,1\rangle + b\langle P_1,P_0\rangle = I_2+a = 1+a$

$\langle X^2+aP_0+bP_1, P_1\rangle = \langle X^2,X\rangle + a\langle P_0,P_1\rangle + b\langle X,X\rangle = I_3 + a\times 0 + bI_2 = b$.

Par conséquent $X^2+aP_0+bP_1$ est orthogonal à P_0 et P_1 si $1+a=2b=0$ i.e. $a=-1$ et $b=0$.

Posons alors $P_2=X^2-1$. (P_0,P_1,P_2) est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$.

Cherchons (u,v,w) dans $\mathbb{R}^3$ pour que : $X^3+uP_0+vP_1+wP_2$ soit orthogonal à P_0,P_1,P_2.

$$\langle X^3+uP_0+vP_1+wP_2, P_0\rangle = \langle X^3,P_0\rangle + u\underbrace{\langle P_0,P_0\rangle}_{=1} + v\underbrace{\langle P_1,P_0\rangle}_{=0} + w\underbrace{\langle P_2,P_0\rangle}_{=0} = I_3+u = u.$$

$$\langle X^3+uP_0+vP_1+wP_2, P_1\rangle = \langle X^3,P_1\rangle + u\langle P_0,P_1\rangle + v\langle P_1,P_1\rangle + w\langle P_2,P_1\rangle$$

$$\langle X^3+uP_0+vP_1+wP_2, P_1\rangle = I_4 + u\times 0 + vI_2 + w\times 0 = I_4+vI_2 = 3+v$$

$$\langle X^3+uP_0+vP_1+wP_2, P_2\rangle = \langle X^3,P_2\rangle + u\underbrace{\langle P_0,P_2\rangle}_{=0} + v\underbrace{\langle P_1,P_2\rangle}_{=0} + w\langle P_2,P_2\rangle = \langle X^3,P_2\rangle + w\langle P_2,P_2\rangle$$

$$= \langle X^3, X^2-1\rangle + w\|P_2\|^2 = \underbrace{\langle X^3,X^2\rangle}_{=I_5=0} - \underbrace{\langle X^3,1\rangle}_{=I_3=0} + w\|P_2\|^2 = w\|P_2\|^2$$

Donc $X^3+uP_0+vP_1+wP_2$ est orthogonal à P_0,P_1,P_2 si $\begin{cases} 0=u \\ 0=3+v \\ 0=w\|P_2\|^2 \end{cases}$; i.e. $u=0$, $v=-3$ et $w=0$

Posons alors $P_3=X^3-3X$

$(P_0,P_1,P_2,P_3)=(1,X,X^2-1,X^3-3X)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$ constituée d'éléments non nuls ; (P_0,P_1,P_2,P_3) est alors une famille libre de quatre éléments de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4. Par conséquent (P_0,P_1,P_2,P_3) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$.

<u>$(1,X,X^2-1,X^3-3X)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$ formée de polynômes dont le coefficient de plus haut degré est 1.</u>

<u>Remarque</u>.. Plus généralement soit φ un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Il existe une base orthogonale $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ et une seule telle que :

$\forall k\in [\![0,n]\!]$, $\deg P_k=k$ et le coef. de X^k dans P_k est 1

. Notons que $P_0=1$ et que pour $k\in[\![1,n]\!]$, P_k est la projection orthogonale de X^k sur la droite vectorielle de $\mathbb{R}_k[X]$ orthogonale à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

. Notons encore que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $P_k = X^k+\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i P_i$ avec $\alpha_i = -\dfrac{\varphi(X^k,P_i)}{\varphi(P_i,P_i)}$.

Q3 a) $\forall x \in \mathbb{R},\ H_0(x) = (-1)^0 e^{+x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(0)} = e^{x^2/2}e^{-x^2/2} = 1.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ H_1(x) = (-1)^1 e^{x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(1)} = -e^{x^2/2}(-x)e^{-x^2/2} = x$

$\forall x \in \mathbb{R},\ H_2(x) = (-1)^2 e^{x^2/2}\left(-x e^{-x^2/2}\right)^{(1)} = e^{x^2/2}\left(-1 + (-x)(-x)\right)e^{-x^2/2} = x^2-1$

$\forall x \in \mathbb{R},\ H_3(x) = (-1)^3 e^{x^2/2}\left((x^2-1)e^{-x^2/2}\right)^{(1)} = -e^{x^2/2}\left(2x + (x^2-1)(-x)\right)e^{-x^2/2} = x^3-3x.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ H_0(x) = 1,\ H_1(x) = x,\ H_2(x) = x^2-1$ et $H_3(x) = x^3-3x.$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(n+1)} = (-1)^{n+1} e^{x^2/2}\left(\left(e^{-x^2/2}\right)^{(1)}\right)^{(n)} = (-1)^{n+1} e^{x^2/2}\left(-x e^{-x^2/2}\right)^{(n)}$

Utilisons alors Leibniz.

$$H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} e^{x^2/2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-x)^{(k)}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-k)} \underset{\substack{\uparrow \\ (-x)^{(k)}=0 \text{ pour } k\geq 2}}{=} (-1)^{n+1} e^{x^2/2}\left[(-x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)} + n(-1)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}\right]$$

$H_{n+1}(x) = (-1)^{n+2} x e^{x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)} - n(-1)^{n+1} e^{x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}.$

$(-1)^{n+2} = (-1)^n$
$(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$

$H_{n+1}(x) = x(-1)^n e^{x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)} - n(-1)^{n-1} e^{x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}$

$H_{n+1}(x) = x H_n(x) - n H_{n-1}(x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad H_{n+1}(x) = x H_n(x) - n H_{n-1}(x).$

Remarques.. 1.. Décidé pour les $(-x)^{(k)}$, $\left(e^{-x^2/2}\right)^{(\dots)}$ mais c'est la logique du texte

2.. Je n'écrirai $H_{n+1} = XH_n - nH_{n-1}$ qu'après avoir prouvé que les H_n sont des polynômes !

Reprenons $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}$. Dérivons.

$\forall x \in \mathbb{R},\ H'_n(x) = (-1)^n (+x) e^{+x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)} + (-1)^n e^{x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n+1)}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ H'_n(x) = x H_n(x) - H_{n+1}(x) = n H_{n-1}(x).$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad H'_n = n H_{n-1}.$

c) Montrons à l'aide d'une récurrence d'ordre 2 que :

$\forall n \in \mathbb{N}$ 1°.. $H_n \in \mathbb{R}[X]$

2°.. $\deg H_n = n$ et le coeff. de X^n dans H_n est 1

3°.. $H_n(-X) = (-1)^n H_n(X)$

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = x$; la propriété est donc vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Supposons la propriété vraie pour n et $n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) et montrons-la pour $n+2$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $H_{n+2}(x) = x H_{n+1}(x) - (n+1) H_n(x)$.

H_{n+1} et H_n étant polynômiales, H_{n+2} l'est aussi ... donc $H_{n+2} \in \mathbb{R}[X]$ et

$H_{n+2} = X H_{n+1} - (n+1) H_n$

$\deg(X H_{n+1}) = n+2 > \cancel{n} = \deg(-(n+1)H_n)$ donc H_{n+2} est de degré $n+2$.

Le coefficient de X^{n+2} dans H_{n+2} n'est autre que le coefficient de X^{n+1} dans H_{n+1} donc 1.

$H_{n+2}(-X) = (-X)H_{n+1}(-X) - (n+1) H_n(-X) = -X(-1)^{n+1} H_{n+1}(X) - (n+1)(-1)^n H_n(X)$

$H_{n+2}(-X) = (-1)^{n+2} [X H_{n+1}(X) - (n+1) H_n(X)] = (-1)^{n+2} H_{n+2}(X)$ ce qui achève la récurrence.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$: 1°.. $H_n \in \mathbb{R}[X]$

2°.. $\deg H_n = n$ et le coeff. de X^n dans H_n est 1

3°.. H_n a la parité de n.

Q4 Remarque.. Avant de commencer cette question il importe de remarquer que

1.. pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de H_n sont dans $\mathbb{Z}$ (ce qui se démontre à l'aide d'une récurrence d'ordre 2)

2.. Notons α_n le coefficient constant de H_n.

$\alpha_{n+1} = -n \alpha_{n-1}$

Alors $\alpha_{2n} = (-1)^n (2n-1)(2n-3)\cdots \times 1 \, \alpha_0 = \dfrac{(-1)^n (2n)!}{2^n n!}$ (et $\alpha_{2n+1} = 0$ ... car H_{2n+1} est impair)

Par exemple $\alpha_{14} = 135135$ or les variables de type integer prennent leurs valeurs dans $[\![-32768, 32767]\!]$. Je doute fortement que l'on puisse récupérer avec la procédure HERMITE les coefficients de H_n pour $n \in [\![0, 20]\!]$!

```
(* Calcul des polynômes de Hermite *)

program escp97;

uses crt;

const DegMax=50;
type poly=array[0..DegMax] of longint;

var n,i:integer;H:poly;

procedure Affiche_poly(haine:integer;p:poly);

var j:integer;

begin
if p[haine]=1 then write('X^',haine) else write(p[haine],'X^',haine);
for j:=haine-1 downto 2 do
if p[j]<>0 then if p[j]>0 then write('+',p[j],'X^',j)
                          else write(p[j],'X^',j);
if p[1]>0 then write('+',p[1],'X');
if p[1]<0 then write(p[1],'X');
if p[0]>0 then write('+',p[0]);
if p[0]<0 then write(p[0]);
end;

procedure HERMITE(n:integer;var H:poly);

var k,j:integer;P,T:poly;

procedure MULTIX(P:Poly;Var Q:Poly);

var l:integer;

begin
Q[0]:=0;
for l:=1 to n do Q[l]:=P[l-1];

end;


begin;
P[0]:=1;H[0]:=0;H[1]:=1;
writeln;
writeln('H0=1');
write('H1=X');
for k:=2 to n do
    begin
    T[0]:=-(k-1)*P[0];T[k-1]:=H[k-2];T[k]:=H[k-1];
    for i:=1 to k-2 do T[i]:=H[i-1]-(k-1)*P[i];
    writeln;write('H',k,'=');
    affiche_poly(k,t);
    P:=H;H:=T;
    end;

end;

 begin
 clrscr;
 write('Donnez la valeur de n. n=');readln(n);
 Hermite(n,H);
 end.
```

```
Donnez la valeur de n. n=8

H0=1
H1=X
H2=X^2-1
H3=X^3-3X
H4=X^4-6X^2+3
H5=X^5-10X^3+15X
H6=X^6-15X^4+45X^2-15
H7=X^7-21X^5+105X^3-105X
H8=X^8-28X^6+210X^4-420X^2+105
```

PARTIE III $(H_n)_{n\geq 0}$ comme famille de polynômes orthogonaux.

(Q1) a) $P\in\mathbb{R}[X]$ et $n\in\mathbb{N}$. Si $P=0$ le résultat est clair. Supposons $P\neq 0$.

$\exists p\in\mathbb{N}, \exists a_p\in\mathbb{R}, \quad P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_p x^p.$

$\forall x\in\mathbb{R}, \quad P(x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)} = (-1)^{n-1}\, P(x)\, H_{n-1}(x)\, e^{-x^2/2}. \qquad H_{n-1}(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{n-1}.$

donc $P(x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} (-1)^{n-1}\, a_p\, x^p x^{n-1} e^{-x^2/2} = (-1)^{n-1} a_p\, x^{n+p-1} e^{-x^2/2}.$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*, \quad x^{n+p-1}e^{-x^2/2} = e^{(n+p-1)\ln x - \frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}\left[-2(n+p-1)\frac{\ln x}{x^2}+1\right]}$

donc $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(x^{n+p-1}e^{-x^2/2}\right)=0$ ce qui donne $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[P(x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}\right]=0.$

De même $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[P(x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}\right]=0$.

b) $\forall n\in\mathbb{N}, \langle H_n, H_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\, e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{+x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)} e^{-x^2/2}\,dx$

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \langle H_n,H_0\rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\left[\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)} - \lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}\right] = 0$ d'après a)

De plus $\langle H_0, H_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 1.$

Finalement, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\langle H_n, H_0\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n\geq 1\end{cases}$.

c) Soit $(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.

$\langle H_n, H_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x)\, e^{-x^2/2}\,dx = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)} H_m(x)\, e^{-x^2/2}\,dx$

$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}$

$\langle H_n, H_m\rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}\,dx.$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = H_m(x)$ et $v(x) = \left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}$. u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = H'_m(x) = m H_{m-1}(x)$ et $v'(x) = \left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}$.

$$\int_A^B H_m(x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)} dx = \int_A^B u(x)\, v'(x)\, dx = \left[u(x)v(x)\right]_A^B - \int_A^B u'(x)\, v(x)\, dx$$

$$\int_A^B H_m(x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)} dx = H_m(B)\left(e^{-B^2/2}\right)^{(n-1)} - H_m(A)\left(e^{-A^2/2}\right)^{(n-1)} - \int_A^B m\, H_{m-1}(x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)} dx.$$

D'après a) $\lim\limits_{B \to +\infty}\left(H_m(B)\left(e^{-B^2/2}\right)^{(n-1)}\right) = \lim\limits_{A \to -\infty}\left(H_m(A)\left(e^{-A^2/2}\right)^{(n-1)}\right) = 0$

Par conséquent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)} dx = -m \int_{-\infty}^{+\infty} H_{m-1}(x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)} dx \quad \text{(les deux intégrales convergent)}$$

Par conséquent : $\langle H_n, H_m \rangle = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)} dx = -\dfrac{m(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{m-1}(x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)} dx$

En remarquant que $-(-1)^n = (-1)^{n-1}$ il vient alors :

$$\underline{\underline{\langle H_n, H_m \rangle = m \langle H_{n-1}, H_{m-1} \rangle}}$$

Montrons que la famille $(H_n)_{n \geqslant 0}$ est orthogonale. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \neq n$. Montrons que $\langle H_n, H_m \rangle = 0$.

Si $m=0$ ou $n=0$ c'est clair d'après b). Supposons $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$m \langle H_{n-1}, H_{m-1} \rangle = \langle H_n, H_m \rangle \underset{\text{sym!}}{=} \langle H_m, H_n \rangle = n \langle H_{m-1}, H_{n-1} \rangle = n \langle H_{n-1}, H_{m-1} \rangle$$

Par conséquent $(m-n)\langle H_{n-1}, H_{m-1} \rangle = 0$; $\langle H_{n-1}, H_{m-1} \rangle = 0$ car $m \neq n$ et donc $\langle H_n, H_m \rangle = 0$.

$\underline{\underline{\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ n \neq m \Rightarrow \langle H_n, H_m \rangle = 0.\ \text{La famille } (H_n)_{n \geqslant 0} \text{ est orthogonale.}}}$

<u>Remarque</u> .. On pouvait aussi prendre $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n > m$ et montrer par récurrence que : $\langle H_n, H_m \rangle = n(n-1)\cdots(n-p+1)\langle H_{n-p}, H_{m-p} \rangle$ pour tout $p \in [\![0, m]\!]$

donc $\langle H_n, H_m \rangle = n(n-1)\cdots(n-m+1)\langle H_{n-m}, H_0 \rangle = 0$ car $n-m \geqslant 1$!

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \langle H_n,H_n\rangle = n\langle H_{n-1},H_{n-1}\rangle$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \dfrac{\langle H_n,H_n\rangle}{n!} = \dfrac{\langle H_{n-1},H_{n-1}\rangle}{(n-1)!}$; la suite $\left(\dfrac{\langle H_n,H_n\rangle}{n!}\right)_{n\geq 0}$ est constante donc

$\forall n\in\mathbb{N},\quad \dfrac{\langle H_n,H_n\rangle}{n!} = \dfrac{\langle H_0,H_0\rangle}{0!} = \dfrac{1}{1} = 1.$ $\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ \langle H_n,H_n\rangle = n!}$ $\quad\underline{\|H_n\| = \sqrt{n!}}$

Q2 a) Soit $k\in\mathbb{N}$. $(H_0,H_1,\dots,H_k)$ est une famille orthogonale d'éléments non nuls de $\mathbb{R}_k[X]$ donc $(H_0,H_1,\dots,H_k)$ est une famille libre de $k+1$ éléments de $\mathbb{R}_k[X]$ qui est de dimension $k+1$; $(H_0,H_1,\dots,H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$; mieux $\underline{(H_0,H_1,\dots,H_k)\text{ est une base orthogonale de }\mathbb{R}_k[X]}$.

Soit R une fonction polynômiale de degré au plus k. $\exists(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{R}^{k+1}$, $R=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i H_i$

$\langle H_{k+1},R\rangle = \sum_{i=0}^{k}\alpha_i\langle H_{k+1},H_i\rangle = \sum_{i=0}^{k}\alpha_i\times 0 = 0$

Donc $\underline{\forall k\in\mathbb{N},\ \forall R\in\mathbb{R}_k[X],\ \langle H_{k+1},R\rangle = 0}$.

b) $n\in\mathbb{N}$, $k\in[\![0,n]\!]$ et $P\in\mathbb{R}_k[X]$.

$\varphi = X^{k+1}-H_{k+1}$ est un élément de $\mathbb{R}_k[X]$ car $\deg H_{k+1}=k+1$ et le coefficient de X^{k+1} dans H_{k+1} est 1 ; par conséquent $X^{k+1}-H_{k+1}-P$ est encore un élément de $\mathbb{R}_k[X]$ donc un élément orthogonal à H_{k+1}.. Pythagore donne directement :

$\|X^{k+1}-P\|^2 = \|(X^{k+1}-H_{k+1}-P)+H_{k+1}\|^2 = \|X^{k+1}-H_{k+1}-P\|^2+\|H_{k+1}\|^2 = \|H_{k+1}\|^2+\|\varphi-P\|^2.$

Donc $\underline{\|X^{k+1}-P\|^2 = \|H_{k+1}\|^2+\|\varphi-P\|^2}$.

notons que $\varphi = X^{k+1}-H_{k+1}$ est la projection orthogonale de X^{k+1} sur $\mathbb{R}_k[X]$

V1 $\quad 1°..\ \varphi\in\mathbb{R}_k[X]$

$\quad 2°..\ X^{k+1}-\varphi = H_{k+1}\in(\mathbb{R}_k[X])^\perp$ ... et c'est fini.

V2 $\quad\forall P\in\mathbb{R}_k[X],\ \|X^{k+1}-P\|^2 = \|H_{k+1}\|^2+\|\varphi-P\|^2 \geq \|H_{k+1}\|^2 = \|X^{k+1}-\varphi\|^2$

donc $\varphi\in\mathbb{R}_k[X]$ et $\forall P\in\mathbb{R}_k[X],\ \|X^{k+1}-P\|\geq\|X^{k+1}-\varphi\|$.

$\varphi\in\mathbb{R}_k[X]$ et $\|X^{k+1}-\varphi\| = \operatorname{Inf}\{\|X^{k+1}-P\|\ ;\ P\in\mathbb{R}_k[X]\}$ donc φ est la projection orthogonale de X^{k+1} sur $\mathbb{R}_k[X]$.

$\underline{\text{La projection orthogonale de }X^{k+1}\text{ sur }\mathbb{R}_k[X]\text{ est }X^{k+1}-\varphi}$ ... ceci dans $\mathbb{R}_{k+1}[X]$ ou dans $\mathbb{R}[X]$!

c) $(G_k)_{0\le k\le n+1}$ est LA famille orthonormale de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ qui vérifie :

1°.. $\forall k\in [\![0,n+1]\!]$, $\mathrm{Vect}(G_0,G_1,\dots,G_k)=\mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^k)$ et

2°.. $\forall k\in [\![0,n+1]\!]$, $\langle G_k, X^k\rangle >0$

Posons $\forall k\in [\![0,n+1]\!]$, $\hat{H}_k = H_k/\|H_k\| = H_k/\sqrt{k!}$ et montrons que $(\hat{H}_k)_{0\le k\le n+1}$ a les mêmes qualités.

- D'après ce qui précède $(\hat{H}_k)_{0\le k\le n+1}$ est évidemment une famille orthonormale de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$
- $\forall k\in [\![0,n+1]\!]$, $\mathrm{Vect}(\hat{H}_0,\hat{H}_1,\dots,\hat{H}_k)=\mathrm{Vect}(H_0,H_1,\dots,H_k)=\mathbb{R}_k[X]=\mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^k)$
- Soit $k\in [\![0,n+1]\!]$. Si $k=0$: $\langle \hat{H}_k, X^k\rangle = \langle \hat{H}_0,1\rangle=\langle\hat{H}_0,\hat{H}_0\rangle=\|\hat{H}_0\|>0$.

Supposons $k\geq 1$. $H_k=X^k+R$ avec $R\in\mathbb{R}_{k-1}[X]$, $X^k=H_k-R$ et $\langle H_k,R\rangle=0$.

$\langle \hat{H}_k, X^k\rangle = \frac{1}{\|H_k\|}\langle H_k, H_k-R\rangle = \frac{1}{\|H_k\|}(\langle H_k,H_k\rangle - \underbrace{\langle H_k,R\rangle}_{=0}) = \|H_k\|^2>0$.

ceci achève de prouver que $(\hat{H}_k)_{0\le k\le n+1}$ a les mêmes qualités que $(G_k)_{0\le k\le n+1}$

donc $\forall k\in [\![0,n+1]\!]$, $G_k=\frac{1}{\|H_k\|}H_k=\frac{1}{\sqrt{k!}}H_k$.

PARTIE IV Un développement en série de Hermite $n\in\mathbb{N}^*$

Q1 Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]=\mathrm{Vect}(H_0,H_1,\dots,H_n)$. $\exists(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $P=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k H_k$

$\forall i\in [\![0,n]\!]$, $\langle P,H_i\rangle=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\langle H_k,H_i\rangle=\alpha_i\langle H_i,H_i\rangle=\alpha_i\, i!$

$\forall i\in [\![0,n]\!]$, $\alpha_i=\langle P,H_i\rangle/i!$

donc $\forall P\in\mathbb{R}_n[X]$, $P=\sum_{k=0}^{n}\frac{\langle P,H_k\rangle}{k!}H_k$.

Q2 Je n'admets pas qu'on admette

Soit $(b,c)\in\mathbb{R}^2$ tel que $b\le c$.

$\forall x\in[b,c]$, $x\le c$ et $-x\le -b$; $\forall x\in[b,c]$, $|x|\le\max(c,-b)$.

Posons $K=\max(1,c,-b)$ (Voir plus loin pour la nécessité de 1.

Montrons à l'aide d'une récurrence d'ordre 2 que : $\forall x\in[b,c]$, $\left|\frac{H_n(x)}{n!}\right|\le\frac{K^n}{[\frac{n}{2}]!}$

- $\forall x\in[b,c]$, $\left|\frac{H_0(x)}{0!}\right|=1\le 1=\frac{K^0}{[\frac{0}{2}]!}$; la propriété est vraie pour $n=0$.

$\forall x \in [b,c]$, $\left|\frac{H_1(x)}{1!}\right| = |x| \leq K = \frac{K^1}{[\frac{1}{2}]!}$; la propriété est vraie pour $n = 1$.

• Supposons la propriété vraie pour n et $n+1$ $(n \in \mathbb{N})$ et montrons la pour $n+2$.

Soit $x \in [b,c]$. $|H_{n+2}(x)| = |x H_{n+1}(x) - (n+1) H_n(x)| \leq |x| |H_{n+1}(x)| + (n+1) |H_n(x)|$

Donc $\left|\frac{H_{n+2}(x)}{(n+2)!}\right| \leq \frac{|x|}{n+2}\left|\frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!}\right| + \frac{(n+1)}{(n+2)(n+1)}\left|\frac{H_n(x)}{n!}\right| \underset{\substack{H.R. + \\ |x| \leq K}}{\leq} \frac{K}{n+2}\frac{K^{n+1}}{[\frac{n+1}{2}]!} + \frac{1}{n+2}\frac{K^n}{[\frac{n}{2}]!}$

En remarquant que $1 \leq K^2$ car $K \geq 1$ on obtient : $\left|\frac{H_{n+2}(x)}{(n+2)!}\right| \leq \frac{K^{n+2}}{n+2}\left[\frac{1}{[\frac{n+1}{2}]!} + \frac{1}{[\frac{n}{2}]!}\right]$

Il ne reste plus qu'à prouver que : $\frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{[\frac{n+1}{2}]!} + \frac{1}{[\frac{n}{2}]!}\right) \leq \frac{1}{[\frac{n+2}{2}]!}$.
Notons que :
$[\frac{n+1}{2}]! \geq [\frac{n}{2}]!$ et $([\frac{n+2}{2}])! = ([\frac{n}{2}+1])! = ([\frac{n}{2}]+1)! = ([\frac{n}{2}]+1)[\frac{n}{2}]!$

donc : $\frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{[\frac{n+1}{2}]!} + \frac{1}{[\frac{n}{2}]!}\right) \leq \frac{2}{n+2}\frac{1}{[\frac{n}{2}]!} = \frac{2([\frac{n}{2}]+1)}{n+2} \times \frac{1}{[\frac{n+2}{2}]!} \underset{[\frac{n}{2}] \leq \frac{n}{2}}{\leq} \frac{2(\frac{n}{2}+1)}{n+2}\frac{1}{[\frac{n+2}{2}]!} = \frac{1}{[\frac{n+2}{2}]!}$

ce qui achève la récurrence.

e) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $b = c = x$; $\exists \hat{K} \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [b,c]$, $\left|\frac{H_n(t)}{n!}\right| \leq \frac{\hat{K}^n}{[\frac{n}{2}]!}$

Alors $\left|\frac{H_n(x)}{n!}\lambda^n\right| \leq \frac{\hat{K}^n |\lambda|^n}{[\frac{n}{2}]!} = \frac{(\hat{K}|\lambda|)^n}{[\frac{n}{2}]!}$. D'après I.2 nous pouvons dire

que la série de terme général $\frac{(\hat{K}|\lambda|)^n}{[\frac{n}{2}]!}$ converge ; les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $\left|\frac{H_n(x)\lambda^n}{n!}\right|$ converge, donc la série de terme général $\frac{H_n(x)\lambda^n}{n!}$ est absolument convergente donc convergente.

Pour tout (x,λ) dans $\mathbb{R}^2$, la série de terme général $\frac{H_n(x)\lambda^n}{n!}$ converge.

b) Posons $\forall y \in \mathbb{R}$, $\ell(y) = e^{-y^2/2}$
ℓ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\ell^{(n)}(y) = (-1)^n H_n(y) e^{-y^2/2} = (-1)^n H_n(y)\ell(y)$

Soit x fixé dans $\mathbb{R}$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $g_x(\lambda) = \ell(\lambda - x)$. Une récurrence simple montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$

g_x est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $g_x^{(n)}(\lambda) = \ell^{(n)}(\lambda - x) = (-1)^n H_n(\lambda - x) g_x(\lambda)$.

Soit $a \in \mathbb{R}^*_+$. g_x est indéfiniment dérivable sur $[-a,a]$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [-a,a], \ |g_x^{(n)}(t)| = |(-1)^n H_n(t-x) e^{-(t-x)^2/2}| \leq |H_n(t-x)|$

Si $t \in [-a,a]$, $t-x \in [-a-x, a-x]$. En posant $b = -a-x$ et $c = a-x$ on peut, d'après ce qui précède, ~~trouver~~ permet de trouver K tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [b,c], \ \left|\frac{H_n(u)}{n!}\right| \leq \frac{K^n}{[\frac{n}{2}]!}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [-a,a], \ |g_x^{(n)}(t)| \leq |H_n(t-x)| \leq \dfrac{K^n n!}{[\frac{n}{2}]!}$.

g_x vérifie alors sur $[-a,a]$ les hypothèses de I φ3. On a alors :

$\forall \lambda \in [-a,a], \ g_x(\lambda) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g_x^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n$; a étant un réel strictement positif quelconque

on a alors : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\underline{g_x(\lambda) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g_x^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n}$. Remplaçons !

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left((-1)^n H_n(0-x)\, g_x(0)\right)\lambda^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n H_n(-x)}{n!} e^{-x^2/2} \lambda^n$$

Notons que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ (-1)^n H_n(-x) = H_n(x)$ (H_n a la parité de n).

Donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ e^{-\frac{\lambda^2}{2} + \lambda x - \frac{x^2}{2}} = e^{-x^2/2} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \lambda^n$

Par conséquent : $\underline{\underline{\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \lambda^n.}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 e^x H_n(x) e^{-x^2/2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 e^x x^n e^{-x^2/2}\right) \overset{e^{-\frac{x^2}{2}\left[1 - \frac{2}{x} - 2(n+2)\frac{\ln x}{x^2}\right]}}{=} 0$

$\exists A \in \mathbb{R}^*_+, \ \forall x \in [A, +\infty[, \ |x^2 e^x H_n(x) e^{-x^2/2}| \leq 1$

$\forall x \in [A,+\infty[, \ |e^x H_n(x) e^{-x^2/2}| \leq 1/x^2$ et $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge ; par

conséquent $\displaystyle\int_A^{+\infty} e^x H_n(x) e^{-x^2/2} dx$ est absolument convergente donc convergente ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^x H_n(x) e^{-x^2/2} dx$ converge.

"Même" chose pour $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x H_n(x) e^{-x^2/2} dx$.

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^x H_n(x) e^{-x^2/2}\,dx$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

$$\int_A^B e^x H_n(x) e^{-x^2/2}\,dx = \int_A^B e^x (-1)^n \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(n)} dx = \left[e^x (-1)^n \left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}\right]_A^B - \int_A^B e^x (-1)^n \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(n-1)} dx$$

$$\int_A^B e^x H_n(x) e^{-x^2/2}\,dx = \left[-e^x H_{n-1}(x) e^{-x^2/2}\right]_A^B + \int_A^B e^x H_{n-1}(x) e^{-x^2/2}\,dx.$$

$\lim\limits_{A\to-\infty}\left(e^A H_{n-1}(A) e^{-A^2/2}\right) = \lim\limits_{B\to+\infty}\left(e^B H_{n-1}(B) e^{-B^2/2}\right) = 0$ (même chose que dans le début de c)).

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x H_n(x) e^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x H_{n-1}(x) e^{-x^2/2}\,dx$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\langle \exp, H_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^x H_n(x) e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^x H_{n-1}(x) e^{-x^2/2}\,dx = \langle \exp, H_{n-1}\rangle$.

La suite $(\langle \exp, H_n\rangle)_{n\geq 0}$ est donc constante. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle \exp, H_n\rangle = \langle \exp, H_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}+x}\,dx$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}+x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} e^{1/2}\,dx \underset{u=x-1}{=} e^{1/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = e^{1/2}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle \exp, H_n\rangle = e^{1/2}$.

Reprenons b) avec $\lambda = 1$. Il vient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{1/2}\frac{H_n(x)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle \exp, H_n\rangle \frac{H_n(x)}{n!}$.

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle \exp, H_n\rangle \frac{H_n(x)}{n!}$