PARTIE I

Q1 Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ est n fois dérivable sur $[0,1[$ et $\varphi^{(n)} = \dfrac{(2n)!}{4^n n!} \varphi^{2n+1}$.

- C'est clair pour $n=0$ car $\varphi^{(0)} = \varphi$ et $\dfrac{(2\times 0)!}{4^0\, 0!} \varphi^{2\times 0+1} = \varphi$.

- Supposons la propriété vraie pour n élément de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

  φ est dérivable sur $[0,1[$ et $\forall x \in [0,1[$, $\varphi'(x) = (-\frac{1}{2}) \times (-1) \times (1-x)^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}(\varphi(x))^3$

  donc $\varphi^{(n)} = \dfrac{(2n)!}{4^n n!} \varphi^{2n+1}$ est dérivable sur $[0,1[$ et :

  $\forall x \in [0,1[$, $(\varphi^{(n)})'(x) = \dfrac{(2n)!}{4^n n!} \times (2n+1)\,\varphi'(x)\,(\varphi(x))^{2n+1-1}$.

Ainsi φ est $n+1$ fois dérivable sur $[0,1[$ et :

$$\forall x \in [0,1[,\ \varphi^{(n+1)}(x) = \frac{(2n+1)!}{4^n n!} \times \frac{1}{2}(\varphi(x))^3 (\varphi(x))^{2n} = \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!} \times \underbrace{\frac{4(n+1)}{2n+2} \times \frac{1}{2}}_{=1} \times (\varphi(x))^{2n+3}$$

$$\forall x \in [0,1[,\ \varphi^{(n+1)}(x) = \frac{(2(n+1))!}{4^{n+1}(n+1)!} (\varphi(x))^{2(n+1)+1}$$

Ainsi <u>φ est n fois dérivable sur $[0,1[$ et $\forall x \in [0,1[$, $\varphi^{(n)}(x) = \dfrac{(2n)!}{4^n n!}(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.</u>

Q2 φ est de classe C^∞ sur $[0,1[$. Soit $x \in [0,1[$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

φ est de classe C^{n+1} sur $[0,1[$. La formule de Taylor avec reste intégral donne alors :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)\,dt$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{(2k)!}{k!\,4^k k!}(1-0)^{-\frac{2k+1}{2}} = \dfrac{C_{2k}^{k}}{4^k}$; donc $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{C_{2k}^{k}}{4^k} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)\,dt$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\ \varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{2k}^{k}}{4^k} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Q3 a) V1 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binômiale de paramètres $2n+2$ et $\frac{1}{2}$.

$$0 \leq P(X=n+1) = C_{2n+2}^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2-(n+1)} = C_{2n+2}^{n+1} \times \frac{1}{4^{n+1}} \leq 1$$ (P prend ses valeurs dans [0,1] !)

Ainsi $C_{2n+2}^{n+1} \leq 4^{n+1}$

V2 $C_{2n+2}^{n+1} \leq \sum_{k=0}^{2n+2} C_{2n+2}^{k} = (1+1)^{2n+2} = 2^{2n+2} = 4^{n+1}$

V3 Par récurrence.

- $C_{2\times 0+2}^{0+1} = C_2^1 = 2 \leq 4^1 = 4^{0+1}$; l'inégalité est vraie pour $n=0$.
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$. H.R + $2n+3 \leq 2n+4$

$$C_{2n+4}^{n+2} = \frac{(2n+4)!}{[(n+2)!]^2} = \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} \times \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+2)^2} = C_{2n+2}^{n+1} \times \frac{2(2n+3)}{n+2} \leq 4^{n+1} \times \frac{2(2n+4)}{n+2} = 4^{n+2}.$$

Ainsi s'achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N},\ C_{2n+2}^{n+1} \leq 4^{n+1}.$

b) Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $0 \leq t \leq x < 1$.

$x < 1$ et $t \geq 0$; $xt \leq t$; $x + xt \leq x + t$; $x - t \leq x - xt$; $x - t \leq x(1-t)$.

Comme $1-t > 0$: $\frac{x-t}{1-t} \leq x$; or $x - t \geq 0$ donc $0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$.

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq t \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x.$

c) Soit x un élément de $[0,1[$; $\forall t \in [0,x],\ 0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x.$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,x],\ 0 \leq \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leq x^n$ et $\frac{1}{n!}\frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!}(1-t)^{-3/2} \geq 0.$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,x],\ 0 \leq \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{n!}\frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!}(1-t)^{-3/2} \leq x^n \frac{1}{n!}\frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!}(1-t)^{-3/2}.$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,x],\ 0 \leq \frac{(x-t)^n}{n!}\frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!}(1-t)^{-\frac{2n+3}{2}} \leq x^n C_{2n+2}^{n+1} \times \frac{n+1}{4^{n+1}}(1-t)^{-3/2}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,x],\ 0 \leq \frac{(x-t)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(t) \leq x^n \times 4^{n+1} \times \frac{n+1}{4^{n+1}}(1-t)^{-3/2} = (n+1)x^n(1-t)^{-3/2}.$

En intégrant on obtient :

$\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)\,dt \leq (n+1)x^n \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{3/2}}$.

$x \in [0,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left((n+1)x^n\right) \underset{\substack{n+1 \sim n \\ n\to+\infty}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} (n x^n) \overset{\text{croissance comparée}}{=} 0$. Par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)\,dt = 0$

Ainsi pour tout x dans $[0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)\,dt = 0$.

(Q4) Soit $x \in [0,1[$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{\ell=0}^{n} \frac{C_{2\ell}^{\ell}}{4^\ell} x^\ell = \varphi(x) - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)\,dt$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{C_{2\ell}^{\ell}}{4^\ell} x^\ell \right) = \varphi(x)$ d'après Q3 c].

Pour tout x dans $[0,1[$, la série de terme général $\frac{C_{2\ell}^{\ell}}{4^\ell} x^\ell$ converge et $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{C_{2\ell}^{\ell}}{4^\ell} x^\ell = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Remarque. • Ceci vaut encore pour $x \in]-1,0[$ et peut s'obtenir en utilisant simplement l'inégalité de Taylor-Lagrange (c'est le cas aussi si $x \in [0,\frac{1}{2}[$ ...)

• Pour $x \in]-\infty,-1[\cup [1,+\infty[$, la série de terme général $\frac{C_{2\ell}^{\ell}}{4^\ell} x^\ell$ diverge.

(Pour $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, c'est sans problème ; pour $x = 1$ utiliser Stirling)

• Pour $x = -1$ la série de terme général $\frac{C_{2\ell}^{\ell}}{4^\ell} x^\ell$ converge (série alternée).

PARTIE II

(Q1) a] 1er cas. $k = n$. $\quad E_0 = [T > 0] \cup [T = 0]$; $P(E_0) = 1$!

Alors $P(A_n) = P(S_n = 0) = P(S_n = 0)P(E_0) = P(S_n = 0)P(E_{n-n})$.

2ème cas. $k \in [\![0, n-1]\!]$. Si $P(S_k = 0) = 0$.

Comme $A_k \subset (S_k = 0)$, $0 \leq P(A_k) \leq P(S_k = 0) = 0$; $P(A_k) = 0$.

Alors $P(A_k) = 0 = 0 \times P(E_{n-k}) = P(S_k = 0)\, P(E_{n-k})$.

b) $P(S_k = 0) \neq 0$.

$P(A_k) = P\left([S_k = 0] \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n} [S_i \neq 0]\right)\right) = P(S_k = 0)\, P\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} [S_i \neq 0] \;/\; S_k = 0\right)$.

Ne reste plus qu'à montrer que $P\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} [S_i \neq 0] / S_k = 0\right) = P(E_{n-k})$

$P\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} [S_i \neq 0] / S_k = 0\right) = P\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} (X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_i \neq 0)\right)$ (indépendance des X_i ...)

Posons pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, $\hat{X}_\ell = X_{k+\ell}$. Posons $\hat{S}_0 = 0$ et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\hat{S}_r = \sum_{\ell=1}^{r} \hat{X}_\ell$.

Posons également pour tout $\omega \in \Omega$, $\hat{T}(\omega) = \begin{cases} \min\{r \in \mathbb{N}^* ; \hat{S}_r(\omega) = 0\} & \text{si } \{r \in \mathbb{N}^* ; \hat{S}_r(\omega) = 0\} \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$(\hat{X}_\ell)_{\ell \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes ayant même loi que X_1.

Ainsi, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\hat{S}_r$ a la même loi que S_r. $\hat{T}$ a également même loi que T.

donc $P\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} [S_i \neq 0] / S_k = 0\right) = P\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} (X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_i \neq 0)\right)$

$$= P\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} (\hat{X}_1 + \hat{X}_2 + \dots + \hat{X}_{i-k} \neq 0)\right)$$

$$= P\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} [\hat{S}_{i-k} \neq 0]\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^{n-k} [\hat{S}_j \neq 0]\right)$$

$$= P(\hat{T} = 0 \text{ ou } \hat{T} > n-k) = P(T = 0 \text{ ou } T > n-k)$$

$$= P(E_{n-k}).$$

Ici encore $P(A_k) = P(S_k = 0)\, P(E_{n-k})$.

$\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(A_k) = P(S_k = 0)\, P(E_{n-k})$.

b) $(\{S_n = 0\}, \{S_n \neq 0\} \cap \{S_{n-1} = 0\}, \{S_n \neq 0\} \cap \{S_{n-1} \neq 0\} \cap \{S_{n-2} = 0\}, \dots, \{S_n \neq 0\} \cap \dots \cap \{S_1 \neq 0\} \cap \{S_0 = 0\})$ est un système complet d'événements.

Ainsi $(A_n, A_{n-1}, \dots, A_0)$ est un système complet d'événements.

Alors $1 = P(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k) = \sum_{k=0}^{n} P(S_k=0)P(E_{n-k})$. $\underline{\underline{1 = \sum_{k=0}^{n} P(S_k=0)P(E_{n-k})}}$.

Q2 Soit $x \in [0,1[$. Posons $a_n = P(S_n=0)x^n$ et $b_n = P(E_n)x^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n = P(S_n=0)x^n \leq x^n$ et $0 \leq b_n = P(E_n)x^n \leq x^n$.

La convergence de la série de terme général x^n et les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la convergence des séries de termes généraux a_n et b_n.

D'après ce qui précède et ce qui est admis on obtient la convergence de la série de terme général $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} P(S_k=0)x^k P(E_{n-k})x^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n} P(S_k=0)P(E_{n-k})\right)x^n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = 1 \times x^n$. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n=0)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n)x^n\right)$.

$$\underline{\underline{\forall x \in [0,1[, \quad \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n=0)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n)x^n\right)}}.$$

Q3 a] $P(S_0=0)=1$ par définition de S_0. Supposons $n \geq 1$.

Notons U_n le nombre de variables aléatoires de la suite $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ prenant la valeur 1 (les autres prenant la valeur -1).

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(X_i=1) = \frac{1}{2}$; ainsi U_n suit une loi binômiale de paramètre n et $\frac{1}{2}$.

Notons alors que : $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n = U_n - (n - U_n) = 2U_n - n$.

Alors $P(S_n=0) = P(U_n = \frac{n}{2})$

Si n est impair : $P(S_n=0)=0$

Si n est pair : $P(S_n=0) = P(U_n = \frac{n}{2}) = C_n^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ... résultat qui vaut pour $n=0$.

Donc $P(S_n=0) = \begin{cases} C_n^{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ou

$$P(S_{2n}=0) = C_{2n}^{n} \frac{1}{4^n} \text{ et } P(S_{2n+1}=0) = 0 \ldots \text{ pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}.$$

b] $x \in [0,1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n=0)x^n = \lim_{r\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{2r} P(S_n=0)x^n\right) = \lim_{r\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{r} P(S_{2n}=0)x^{2n}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n=0)x^n = \lim_{r\to+\infty} \sum_{n=0}^{r} \frac{C_{2n}^n}{4^n}(x^2)^n = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{car } x^2 \in [0,1[\quad (\text{I Q4})$$

Alors $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n)x^n$; $\sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n)x^n = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

$$\forall x \in [0,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n)x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

c] $E_n = (T>n) \cup (T=0)$; $(T=0) \subset E_n$; $0 \leq P(T=0) \leq P(E_n)$.

$\forall x \in [0,1[, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq P(T=0)x^n \leq P(E_n)x^n$

$\forall x \in [0,1[, \quad 0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=0)x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n)x^n$

$\forall x \in [0,1[, \quad 0 \leq P(T=0) \times \frac{1}{1-x} \leq \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$\forall x \in [0,1[, \ 0 \leq P(T=0) \leq (1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{1-x^2}$

En faisant tendre x vers 1 on obtient : $0 \leq P(T=0) \leq 0$

Finalement $P(T=0) = 0$.

<u>Remarque</u>.- On peut également obtenir le résultat de a] en posant $Y_k = \frac{X_k+1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Alors → Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_1+Y_2+\cdots+Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ et → $S_n = 2(Y_1+\cdots+Y_n) - n$

Partie III

(Q1) a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0,1[$. Notons que $x^{p+1} \in [0,1[$.

Alors $\sqrt{1-x}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k}\right) = \sqrt{1-x}\, f(x^{p+1}) = \sqrt{\frac{1-x}{1-x^{p+1}}}\left(\sqrt{1-x^{p+1}}\, f(x^{p+1})\right)$.

$$\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2+\dots+x^p}}\left(\sqrt{1-x^{p+1}}\, f(x^{p+1})\right).$$

$\forall x \in [0,1[,\ x^{p+1} \in [0,1[$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} x^{p+1} = 1^{(-)}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\sqrt{1-x}\, f(x)\right) = \sqrt{\pi}$; alors

par composition : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\sqrt{1-x^{p+1}}\, f(x^{p+1})\right) = \sqrt{\pi}$.

Notons aussi que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{\sqrt{1+x+\dots+x^p}} = \frac{1}{\sqrt{p+1}}$

Alors $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. $f_p : t \mapsto \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Soit $(\varepsilon, A) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$.

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\, dt \underset{\substack{u = \sqrt{2(p+1)t} \\ du = \sqrt{2(p+1)}\frac{dt}{2\sqrt{t}}}}{=} \int_{\sqrt{2(p+1)\varepsilon}}^{\sqrt{2(p+1)A}} e^{-(p+1)\frac{u^2}{2(p+1)}} \frac{2}{\sqrt{2(p+1)}}\, du.$$

$$\int_\varepsilon^A f_p(t)\,dt = \frac{2}{\sqrt{2(p+1)}} \int_{\sqrt{2(p+1)\varepsilon}}^{\sqrt{2(p+1)A}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Le cours nous a indiqué que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du$ existe et vaut 1.

Par parité $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du$ existe et vaut $1/2$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$ existe et vaut $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

Or $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sqrt{2(p+1)\varepsilon} = 0$, $\lim\limits_{A \to +\infty} \sqrt{2(p+1)A} = +\infty$ et $\int_\varepsilon^A f_p(t)\,dt = \frac{2}{\sqrt{2(p+1)}} \int_{\sqrt{2(p+1)\varepsilon}}^{\sqrt{2(p+1)A}} e^{-u^2/2}\,du$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} f_p(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{2}{\sqrt{2(p+1)}} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}$.

Pour tout p dans $\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt$ converge et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{p+1}}$.

---

c) a) et b) donnent alors : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} \right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

Q3) Soit φ une application polynomiale réelle.

$\exists r \in \mathbb{N}$, $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sum_{p=0}^{r} \alpha_p x^p$.

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} \right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Alors $$\sum_{p=0}^{r} \left[\alpha_p \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} \right) \right] = \sum_{p=0}^{r} \alpha_p \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt.$$

donc $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\sum_{p=0}^{r} \left(\alpha_p \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} \right) \right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \left(\sum_{p=0}^{r} \alpha_p (e^{-t})^p \right) dt$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\left(\sum_{p=0}^{r} \alpha_p (x^k)^p \right) a_k x^k \right) \right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, \varphi(e^{-t})\,dt$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k x^k \varphi(x^k) \right) \right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, \varphi(e^{-t})\,dt$$

Q3 a) $\forall t \in]0,1]$, $e^{-t} \in [\frac{1}{e}, 1[$ et $\forall t \in]1,+\infty[$, $e^{-t} \in [0, \frac{1}{e}[$.

$\forall t \in]0,1]$, $h(e^{-t}) = \frac{1}{e^{-t}}$ et $\forall t \in]1,+\infty[$, $h(e^{-t}) = 0$.

$\forall t \in]0,1]$, $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\forall t \in]1,+\infty[$, $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) = 0$

On peut alors au moins dire que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})\,dt$ converge et vaut 0.

$\forall \varepsilon \in]0,1[$, $\int_\varepsilon^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})\,dt = \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$.

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})\,dt = 2$; $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})\,dt$ converge et vaut 2.

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})\,dt$ converge et vaut 2.

b) Soit x un élément de $[0,1[$.

$\lim\limits_{k \to +\infty} x^k = 0$. $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![k_0, +\infty[\![$, $0 \leq x^k < \frac{1}{e}$

$\forall k \in [\![k_0, +\infty[\![$, $h(x^k) = 0$; ainsi la série de terme général $a_k x^k h(x^k)$ converge car son terme général est nul à partir d'un rang.

Q4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $e^{-\frac{1}{n}} \in [0,1[$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-1/n} = 1^{(-)}$. Ainsi :

$2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})\,dt = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{1 - e^{-\frac{1}{n}}} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k e^{-\frac{k}{n}} h(e^{-\frac{k}{n}}) \right) \right)$

Or $h(e^{-\frac{k}{n}}) = \begin{cases} \frac{1}{e^{-k/n}} & \text{si } e^{-k/n} \in [\frac{1}{e}, 1[\text{ i.e. } -\frac{k}{n} \geq -1 \text{ i.e. } k \leq n \\ 0 & \text{si } e^{-k/n} \in [0, \frac{1}{e}[\text{ i.e. } -\frac{k}{n} < -1 \text{ i.e. } k > n \end{cases}$

Alors $e^{-k/n} h(e^{-k/n}) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$

Donc $2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{1 - e^{-1/n}} \sum_{k=0}^{n} a_k \right)$; $\sqrt{1 - e^{-1/n}} \sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n \to +\infty}{\sim} 2$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{1-e^{-1/n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = 2\sqrt{n} \quad (e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \ ; \ 1-e^{-x} \underset{0}{\sim} x)$$

Alors $\underline{\underline{\sum_{k=0}^{n} a_k \sim 2\sqrt{n}}}$.

Partie IV

(Q1) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n \neq [\alpha n]$ et $n \neq [\beta n]$.

n est nécessairement différent de 0. Ainsi $0 < \alpha n < n < \beta n$ car $0 < \alpha < 1 < \beta$.

Alors $[\alpha n] \leq n \leq [\beta n]$; comme $n \neq [\alpha n]$ et $n \neq [\beta n]$: $[\alpha n] < n < [\beta n]$

$S_{[\beta n]} - S_n = \sum_{k=n+1}^{[\beta n]} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{[\beta n]} a_n = ([\beta n] - n)\, a_n$ car la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante

Ainsi $a_n \geq \dfrac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n}$.

$S_n - S_{[\alpha n]} = \sum_{k=[\alpha n]+1}^{n} a_k \geq \sum_{k=[\alpha n]+1}^{n} a_n = a_n (n - [\alpha n])$; $\dfrac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]} \geq a_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \neq [\alpha n] \text{ et } n \neq [\beta n] \Rightarrow \frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leq a_n \leq \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}.$$

(Q2) a) $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall n \in [\![[\frac{1}{\gamma}]+1, +\infty [\![$, $0 < [\gamma n] \leq \gamma n < [\gamma n] + 1$.

$\forall n \in [\![[\frac{1}{\gamma}]+1, +\infty [\![$, $1 \leq \gamma \dfrac{n}{[\gamma n]} < 1 + \dfrac{1}{[\gamma n]} < 1 + \dfrac{1}{\gamma n - 1}$.

$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\gamma n - 1}\right) = 1$ donc par encadrement il vient : $\lim_{n\to+\infty} \left(\gamma \dfrac{n}{[\gamma n]}\right) = 1$.

Alors $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{[\gamma n]} = \dfrac{1}{\gamma}}}$.

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} [\gamma n] = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_{[\gamma n]}}{2\sqrt{[\gamma n]}} = 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S[\gamma n]}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2\sqrt{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} \times \frac{S[\gamma n]}{2\sqrt{[\gamma n]}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(2 \times \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{[\gamma n]}}} \times \frac{S[\gamma n]}{2\sqrt{[\gamma n]}}\right) = 2 \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\gamma}}} \times 1$$

$$\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{S[\gamma n]}{\sqrt{n}}\right) = 2\sqrt{\gamma}.}}$$

b) Soit ε un élément de $\mathbb{R}_+^*$. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{[\alpha n]} = \frac{1}{\alpha} > 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{[\beta n]} = \frac{1}{\beta} < 1$.

Alors $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1 \Rightarrow \frac{n}{[\alpha n]} > 1$; $\forall n \in [\![n_1, +\infty [\![$, $n \neq [\alpha n]$.

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2 \Rightarrow \frac{n}{[\beta n]} < 1$; $\forall n \in [\![n_2, +\infty [\![$, $n \neq [\beta n]$.

Posons $n_3 = \max(n_1, n_2)$.

$$\forall n \in [\![n_3, +\infty [\![, \quad \frac{S[\beta n] - S_n}{[\beta n] - n} \leq a_n \leq \frac{S_n - S[\alpha n]}{n - [\alpha n]}.$$

$$\forall n \in [\![n_3, +\infty [\![, \quad \sqrt{n} \times \frac{\sqrt{n}}{n} \times \frac{\frac{S[\beta n]}{\sqrt{n}} - \frac{S_n}{\sqrt{n}}}{\frac{[\beta n]}{n} - 1} \leq \sqrt{n}\, a_n \leq \sqrt{n} \times \frac{\sqrt{n}}{n} \; \frac{\frac{S_n}{\sqrt{n}} - \frac{S[\alpha n]}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{[\alpha n]}{n}}.$$

$$\forall n \in [\![n_3, +\infty [\![, \quad \underbrace{\frac{\frac{S[\beta n]}{\sqrt{n}} - \frac{S_n}{\sqrt{n}}}{\frac{[\beta n]}{n} - 1}}_{u_n} \leq \sqrt{n}\, a_n \leq \underbrace{\frac{\frac{S_n}{\sqrt{n}} - \frac{S[\alpha n]}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{[\alpha n]}{n}}}_{v_n},$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2\sqrt{\beta} - 2}{\beta - 1} = 2\left(\frac{\sqrt{\beta} - 1}{\beta - 1}\right) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{2 - 2\sqrt{\alpha}}{1 - \alpha} = 2\left(\frac{1 - \sqrt{\alpha}}{1 - \alpha}\right).$$

Ainsi $\exists n_4 \in [\![n_3, +\infty [\![$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_4 \Rightarrow \left| u_n - 2\left(\frac{\sqrt{\beta}-1}{\beta-1}\right)\right| < \varepsilon$

$\exists n_5 \in [\![n_3, +\infty [\![$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_5 \Rightarrow \left| v_n - 2\left(\frac{1-\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}\right)\right| < \varepsilon$

Posons $n_0 = \max(n_4, n_5)$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $2\left(\frac{\sqrt{\beta}-1}{\beta-1}\right) - \varepsilon < u_n < 2\left(\frac{\sqrt{\beta}-1}{\beta-1}\right) + \varepsilon$ et $2\left(\frac{1-\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}\right) - \varepsilon < v_n < 2\left(\frac{1-\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}\right) + \varepsilon$.

Rappelons que $n_0 \geq n_3$ et que $\forall n \in [\![n_3, +\infty [\![$, $u_n \leq \sqrt{n}\, a_n \leq v_n$.

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $\frac{2(\sqrt{\beta}-1)}{\beta-1} - \varepsilon \leq \sqrt{n}\, a_n \leq \frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha} + \varepsilon$.

Ainsi si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et si α et β sont deux réels tels que $0 < \alpha < 1 < \beta$:

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $\frac{2(\sqrt{\beta}-1)}{\beta-1} - \varepsilon \leq \sqrt{n}\, a_n \leq \frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha} + \varepsilon$

⚠ Observons que n_0 dépend de ε $\boxed{\text{ET}}$ de α et β.

Q3 $\lim_{x \to 1} \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{2}{\sqrt{x}+1} = 1$; donc $\lim_{\beta \to 1^+} \frac{2(\sqrt{\beta}-1)}{\beta-1} = 1$ et $\lim_{\alpha \to 1^-} \frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha} = 1$

⚠ Il n'est pas question de faire tendre α vers 1 et β vers 1 dans (*) car n_0 dépend précisément de α et β. Il faut donc jouer beaucoup plus fin pour montrer que $\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{n}\, a_n) = 1$.

Nous allons montrer que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |\sqrt{n}\, a_n - 1| < 2\varepsilon$...

pour rester dans l'esprit du texte.

Fixons ε dans $\mathbb{R}_+^*$. $\lim_{x \to 1} \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1} = 1$.

Alors $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $|x-1| < \eta \Rightarrow \left| \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1} - 1 \right| < \varepsilon$

Ainsi $\forall x \in]1-\eta, 1+\eta[$, $1 - \varepsilon < \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1} < 1 + \varepsilon$

Choisissons $\underline{\underline{\text{UN}}}$ β dans $]1, 1+\eta[$ (on peut poser $\beta = 1 + \frac{\eta}{2}$) ;

Alors $1 < \beta$ et $\frac{2(\sqrt{\beta}-1)}{\beta-1} > 1 - \varepsilon$.

Choisissons alors UN α dans $]0,1[\cap]1-\eta, 1[$ (on peut poser $\alpha = 1 - \inf(\frac{1}{2}, \frac{\eta}{2})$)

Alors $0 < \alpha < 1$ et $\frac{2(\sqrt{\alpha}-1)}{\alpha-1} = 2\frac{1-\sqrt{\alpha}}{1-\alpha} < 1 + \varepsilon$.

α et β étant fixés et vérifiant : $0 < \alpha < 1 < \beta$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![, \quad \dfrac{2(\sqrt{\beta}-1)}{\beta-1} - \varepsilon \leq \sqrt{n}\, a_n \leq \dfrac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha} + \varepsilon$

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![, \quad 1-\varepsilon-\varepsilon < \dfrac{2(\sqrt{\beta}-1)}{\beta-1} - \varepsilon - \varepsilon \leq \sqrt{n}\, a_n \leq \dfrac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha} + \varepsilon < 1+\varepsilon+\varepsilon.$

$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![, \ 1-2\varepsilon < \sqrt{n}\, a_n < 1+2\varepsilon \,; \ \forall n \in [\![n_0, +\infty [\![, \ |\sqrt{n}\, a_n - 1| < 2\varepsilon.$

Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0 \Rightarrow |\sqrt{n}\, a_n - 1| < 2\varepsilon \,; \ \underline{\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{n}\, a_n) = 1}.$

PARTIE V

(Q1) a) Il s'agit sans doute d'utiliser III et IV !

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(E_n) = P([T>n] \cup [T=0]) \underset{\uparrow}{=} P([T>n]) + P[T=0] \underset{\uparrow}{=} P[T>n].$

union disjointe $\qquad\qquad$ $P[T=0]=0$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(T>k) = \sum_{k=0}^{n} P(E_k).$

Rappelons que $\forall x \in [0,1[, \ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(E_k)\, x^k = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}.$

Ainsi $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} P(E_k)\, x^k \right) = \lim_{x \to 1} \sqrt{1+x} = \sqrt{2}$. Hum ?

mais $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\, P(E_k) \right) x^k \right) = \sqrt{\pi}$ ... c'est mieux !

Posons $\forall k \in \mathbb{N}, \ a_k = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, P(E_k)$.

→ $\forall k \in \mathbb{N}, \ a_k \geq 0$

→ Pour tout x élément de $[0,1[$, la série de terme général $a_k x^k = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, P(E_k)\, x^k$ converge.

Alors d'après la partie III : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\, P(E_k) \sim 2\sqrt{n}$

$$\sum_{k=0}^{n} P(E_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, 2\sqrt{n} . \qquad \underline{\underline{\sum_{k=0}^{n} P(T>k) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sqrt{n}}} .$$

b) $\forall n\in\mathbb{N}, P(E_n)\geqslant 0$; $\forall n\in\mathbb{N}$, $E_{n+1}\subset E_n$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(E_{n+1})\leqslant P(E_n)$. De plus $\sum_{k=0}^{n} P(E_k) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, 2\sqrt{n}$

$\forall k\in\mathbb{N}$, $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, P(E_k)\geqslant 0$; $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, P(E_k)\right)_{k\geqslant 0}$ est décroissante et $\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, P(E_k) \sim 2\sqrt{n}$. IV donc $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, P(E_n) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$P(E_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{\sqrt{n}} ; \qquad \underline{\underline{P(T>n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{\sqrt{n}}}} .$$

Q2 Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(T>n)\geqslant 0$ et que la série de terme général $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, <u>la série de terme général $P(T>n)$ diverge</u>.

Ainsi $E(T)$ n'existe pas, non ? ($E(T)$ existe si et seulement si la série de terme général $P(T>n)$ converge n'est-il pas ? Cf. un cas d'existence $E(T)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(T>n)$)

Une petite démonstration s'impose. Supposons que $E(T)$ existe.
Alors la série de terme général $k\,P(T=k)$ est (absolument) convergente.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} k\,P(T=k) = \sum_{k=1}^{n} k\,P(T=k) = \sum_{k=1}^{n} k\,P(T>k-1) - \sum_{k=1 \text{ ou } 0}^{n} k\,P(T>k)$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} k\,P(T=k) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,P(T>k) - \sum_{k=0}^{n-1} k\,P(T>k) - n\,P(T>n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T>k) - n\,P(T>n)$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} P(T>k) = \sum_{k=0}^{n-1} k\,P(T=k) + n\,P(T>n)$

$\sum_{k=0}^{+\infty} k\,P(T=k) = E(T)$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, $k\,P(T=k)\geqslant 0$ alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} k\,P(T=k)\leqslant E(T)$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n\,P(T>n) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(T=k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n\,P(T=k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,P(T=k) \leqslant E(T)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} P(T>k) \leqslant 2E(T)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} P(T>k) \leqslant 2E(T)$.

La série de terme général $P(T>k)$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée ; elle est donc convergente ce qui contredit ce qui a été montré au départ.

Ainsi $\underline{T \text{ n'a pas d'espérance}}$.

(Q3) Soit x un élément de $[0,1[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(T>n)\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n)\, x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

$$\sum_{n=0}^{r} P(T=n)\, x^n \underset{P(T=0)=0}{=} \sum_{n=1}^{r} \big(P(T>n-1)-P(T>n)\big) x^n = \sum_{n=0}^{r-1} P(T>n)\, x^{n+1} - \sum_{n=1}^{r} P(T>n)\, x^n$$

$$\sum_{n=0}^{r} P(T=n)\, x^n = x\Big(\sum_{n=0}^{r-1} P(T>n)\, x^n\Big) - \sum_{n=0}^{r} P(T>n)\, x^n + P(T>0)$$

$P(T>0) = 1 - P(T=0) = 1-0 = 1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} P(T>n)\, x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

En faisant tendre r vers $+\infty$ il vient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(T=n)\, x^n = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 1 = (x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 1 = 1 - \sqrt{1-x}\sqrt{1+x} = 1-\sqrt{1-x^2}.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(T=n)\, x^n = 1-\sqrt{1-x^2}.$$

Si $x=1$: $1-\sqrt{1-x^2} = 1-0 = 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=n)\, x^n$ et l'égalité vaut ainsi pour $x=1$.

$$\underline{\forall x \in [0,1], \quad \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=n)\, x^n = 1-\sqrt{1-x^2}.}$$

(Q4) a) $(1+u)^\alpha = 1 + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\ell+1)}{\ell!} u^\ell + o(u^n)$ ... au voisinage de 0.

$$(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{\ell=1}^{n} \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{1}{2}-1\Big)\cdots\Big(\tfrac{1}{2}-(\ell-1)\Big)\frac{u^\ell}{\ell!} + o(u^n) = 1 + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2^\ell}\, 1\times(-1)\times(-3)\times\cdots\times(-2\ell+3)\,\frac{u^\ell}{\ell!} + o(u^n)$$

$$(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(-1)^{\ell-1}\, 1\times 3\times\cdots\times(2\ell-3)}{2^\ell\, \ell!}\, u^\ell + o(u^n).$$

$$(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{l=1}^{n} \frac{(-1)^{l-1}(2l-2)!}{2^l \times l! \times 2^{l-1} \times (l-1)!} u^l + o(u^n).$$

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \sum_{l=1}^{n} \frac{(-1)^{l-1}(2l)!}{2^l \times l! \times 2^l \times l! \times (2l-1)} u^l + o(u^n) = 1 + \sum_{l=1}^{n} \frac{(-1)^{l-1} C_{2l}^{l}}{(2l-1)4^l} u^l + o(u^n).$$

Enfin $\quad (1+u)^{1/2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1} C_{2k}^{k}}{(2k-1)4^k} u^k + o(u^n)$

---

b) $\quad (1-x^2)^{1/2} = \displaystyle\sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^{l-1} C_{2l}^{l}}{(2l-1)4^l}(-x^2)^l + o(x^{2n})$ d'après ce qui précède.

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 + \sum_{l=1}^{n} \frac{(-1)^{l-1} C_{2l}^{l}}{(2l-1)4^l} x^{2l} + o(x^{2n}) = 1 - \sum_{l=1}^{n} \frac{C_{2l}^{l}}{(2l-1)4^l} x^{2l} + o(x^{2n}).$$

$$1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{l=1}^{n} \frac{C_{2l}^{l}}{(2l-1)4^l} x^{2l} + o(x^{2n}).$$

---

c) Pour montrer que : $1 - \sqrt{1-x^2} = \displaystyle\sum_{l=0}^{2n} P(T=l)x^l + o(x^{2n})$ il suffit de prouver que $\displaystyle\sum_{l=2n+1}^{+\infty} P(T=l)x^l = o(x^{2n})$ car $1-\sqrt{1-x^2} = \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} P(T=l)x^l$ pour $x \in [0,1]$.

Posons $\forall x \in [0,1]$, $\quad \mathcal{E}(x) = \displaystyle\sum_{k=2n+1}^{+\infty} P(T=k)\, x^{k-2n}$.

$\forall x \in [0,1]$, $\quad 0 \leq \mathcal{E}(x) = x \displaystyle\sum_{k=2n+1}^{+\infty} P(T=l)\, x^{l-(2n+1)} \leq x \sum_{l=2n+1}^{+\infty} P(T=l)$.

$\displaystyle\lim_{x \to 0}\left(x \sum_{l=2n+1}^{+\infty} P(T=l)\right) = 0$; par encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \mathcal{E}(x) = 0$.

Comme $\displaystyle\sum_{l=2n+1}^{+\infty} P(T=l)x^l = x^{2n}\mathcal{E}(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x\to 0}\mathcal{E}(x) = 0$ on peut écrire $\displaystyle\sum_{k=2n+1}^{+\infty} P(T=l)\,x^l = o(x^{2n})$ et ainsi $1-\sqrt{1-x^2} = \displaystyle\sum_{l=0}^{2n} P(T=l)x^l + o(x^{2n})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

d) $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{C_{2\ell}^{\ell}}{(2\ell-1)4^{\ell}} x^{2\ell} + o(x^{2n}) = \sum_{\ell=0}^{2n} P(T=\ell)\, x^{\ell} + o(x^{2n})$.

De l'unicité du développement limité de $x \mapsto \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ en 0 à l'ordre $2n$ il résulte :

$P(T=0)=0$ et $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $P(T=2\ell) = \frac{C_{2\ell}^{\ell}}{(2\ell-1)4^{\ell}}$, et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(T=2n) = \frac{C_{2n}^{n}}{(2n-1)4^{n}}$. Notons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(T=2n+1)=0$.

(Q5) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\{T_2 = 2n\} \subset \bigcup_{\ell=1}^{2n-1} \{T=\ell\}$

Alors $P(T_2=2n) = \sum_{\ell=1}^{2n-1} P(\{T=\ell\} \cap \{T_2=2n\})$

Si ℓ est impair : $0 \leq P(\{T=\ell\} \cap \{T_2=2n\}) \leq P(T=\ell) = 0$ donc $P(\{T=\ell\}\cap\{T_2=2n\})=0$.

Alors $P(T_2=2n) = \sum_{\ell=1}^{n-1} P(\{T=2\ell\} \cap \{T_2=2n\})$

ou

$P(T_2=2n) = \sum_{\ell=1}^{n-1} P(T_2=2n / T=2\ell)\, P(T=2\ell)$

Soit $\ell \in [\![1, n-1]\!]$

$P(\{T_2=2n\} \cap \{T=2\ell\}) = P(\{S_1 \neq 0\} \cap \{S_2 \neq 0\} \cap \dots \cap \{S_{2\ell-1} \neq 0\} \cap \{S_{2\ell}=0\} \cap \{S_{2\ell+1} \neq 0\}$
$\cap \dots \cap \{S_{2n-1} \neq 0\} \cap \{S_{2n}=0\})$

$P(\{T_2=2n\} \cap \{T=2\ell\}) = P(\{S_1 \neq 0\} \cap \dots \cap \{S_{2\ell-1} \neq 0\} \cap \{S_{2\ell}=0\} \cap \{X_{2\ell+1} \neq 0\} \cap \{X_{2\ell+1}+X_{2\ell+2} \neq 0\} \cap \dots$
$\cap \{X_{2\ell+1}+X_{2\ell+2}+\dots+X_{2n-1} \neq 0\} \cap \{X_{2\ell+1}+X_{2\ell+2}+\dots+X_{2n}=0\})$

Par indépendance il vient

$P(\{T_2=2n\} \cap \{T=2\ell\}) = P(T=2\ell)\; P(\{X_{2\ell+1} \neq 0\} \cap \{X_{2\ell+1}+X_{2\ell+2} \neq 0\} \cap \dots \cap \{X_{2\ell+1}+\dots+X_{2n-1} \neq 0\}$
$\cap \{X_{2\ell+1}+\dots+X_{2n}=0\})$.

Utilisons une démarche analogue à celle de II Q1 a) p6

(Posons pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$ $\check{X}_\ell = X_{2\ell+\ell}$. Posons $\check{S}_0 = 0$ et $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $\check{S}_r = \sum_{\ell=1}^{r} \check{X}_\ell$

Posons pour tout $\omega \in \Omega$, $\check{T}(\omega) = \begin{cases} \min\{r \in \mathbb{N}^* \mid \check{S}_r(\omega)=0\} & \text{si } \{r \in \mathbb{N}^* \mid \check{S}_r(\omega)=0\} \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$(\check{X}_i)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes ayant même loi que X_1.

Ainsi, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\check{S}_r$ a même loi que S_r et $\check{T}$ a même loi que T. Alors :

$P(\{T_2=n\} \cap \{T=k\}) = P(T=k)\, P(\{\check{X}_1 \neq 0\} \cap \{\check{X}_1+\check{X}_2 \neq 0\} \cap \dots \cap \{\check{X}_1+\check{X}_2+\dots+\check{X}_{n-1-k} \neq 0\} \cap \{\check{X}_1+\check{X}_2+\dots+\check{X}_{n-k}=0\})$

$P(\{T_2=n\} \cap \{T=k\}) = P(T=k)\, P(\{\check{S}_1 \neq 0\} \cap \{\check{S}_2 \neq 0\} \cap \dots \cap \{\check{S}_{n-1-k} \neq 0\} \cap \{\check{S}_{n-k}=0\})$

$P(\{T_2=n\} \cap \{T=k\}) = P(T=k)\, P(\check{T}=n-k) = P(T=k)\, P(T=n-k)$

↑ $\check{T}$ a même loi que T.

$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(\{T_2=k\} \cap \{T=k\}) = P(T=k)\, P(T=n-k)$.

Alors $\quad P(T_2=n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} P(T=k)\, P(T=n-k)$.

Or $P(T=0)=0$ donc $\quad \underline{\underline{P(T_2=n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(T=k)\, P(T=n-k) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*}}$.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(T=k) \geq 0$ et la série de terme général $P(T=k)$ converge.

Alors la série de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(T=k)\, P(T=n-k)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} P(T=k)P(T=n-k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=k) \times \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=k) = 1 \times 1 = 1.$$

Ainsi $\quad \underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{0} P(T=k)\, P(T=n-k)}_{=0} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(T_2=n) = 1$

donc $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(T_2=n) = 1$.

$(\{T_2=i\})_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints

Ainsi $\quad P\left(\displaystyle\bigcup_{i=0}^{+\infty} \{T_2=i\}\right) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P(T_2=i)$.

$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{T_2=n\} \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty} \{T_2=i\}$; $\quad 1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(T_2=n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{T_2=n\}\right) \leq P\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} \{T_2=i\}\right) \leq 1$.

Alors $\quad 1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(T_2=n) = P\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} \{T_2=i\}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(T_2=i)$.

Alors $0 = \sum_{i=0}^{+\infty} P(T_2=i) - \sum_{n=1}^{+\infty} P(T_2=2n) = P(T_2=0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(T_2=2n+1)$

P prenant ses valeurs dans $[0,1]$ il vient :

$P(T_2=0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(T_2=2n+1)=0$.

Soit $x \in [0,1[$. La série de terme général $P(T=2n)x^{2n}$ converge

$(0 \leq P(T=2n)x^{2n} \leq P(T=2n) \dots)$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$ $P(T=2n)x^{2n} \geq 0$.

Alors 1°/ la série de terme général $\sum_{k=0}^{n} P(T=2k)x^{2k} P(T=2n-2k)x^{2n-2k}$ converge ;

2°/ $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\left(P(T=2k)x^{2k} P(T=2n-2k)x^{2n-2k}\right)}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(T=2n)x^{2n}\right)^2$.

$$= \begin{cases} P(T_2=2n)x^{2n} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si } n=0 \end{cases}$$

Observons que 0 vaut aussi $P(T_2=2\times 0)x^{2\times 0}$.

Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} P(T_2=2n)x^{2n} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(T=2n)x^{2n}\right)^2 = \left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2$

$\sum_{n=0}^{+\infty} P(T_2=2n)x^{2n} = (1-\sqrt{1-x^2})^2$ pour tout x dans $[0,1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

(Q6) On montre comme dans Q4 c) que :

$\sum_{n=0}^{+\infty} P(T_2=2n)x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} P(T_2=2k)x^{2k} + o(x^{2n})$.

Rappelons que : $1-\sqrt{1-x^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_{2k}^{k}}{(2k-1)4^k} x^{2k} + o(x^{2n})$.

$(1-\sqrt{1-x^2})^2 = 1+1-x^2-2\sqrt{1-x^2} = -x^2 + 2(1-\sqrt{1-x^2})$

$(1-\sqrt{1-x^2})^2 = -x^2 + 2\sum_{k=1}^{n} C_{2k}^{k} \frac{1}{(2k-1)4^k} x^{2k} + o(x^{2n}) = 2\sum_{k=2}^{n} C_{2k}^{k} \frac{1}{(2k-1)4^k} x^{2k} + o(x^{2n})$

$$(1-\sqrt{1-x^2})^2 = \sum_{k=0}^{n} P(T_2=2k)\,x^{2k} + o(x^n) = 2\sum_{k=2}^{n} C_{2k}^{k}\,\frac{1}{(2k-1)4^k}\,x^{2k} + o(x^n).$$

de l'unicité du développement limité de $x \mapsto (1-\sqrt{1-x^2})^2$ à l'ordre n

au voisinage de 0 il vient :

$P(T_2=2\times 0)=0$, $P(T_2=2\times 1)=0$, $\forall k\in [\![2, n]\!]$, $P(T_2=2k)=\dfrac{2C_{2k}^{k}}{(2k-1)4^k}$.

ceci vaut pour tout $n\in [\![2,+\infty[\![$.

Alors $\forall k\in \mathbb{N},\ P(T_2=2k+1)=0$; $P(T_2=0)=0$; $P(T_2=2)=0$;

$\forall k\in [\![2,+\infty[\![,\ P(T_2=2k)=\dfrac{2C_{2k}^{k}}{(2k-1)4^k}$.