CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

E.S.C.P. - E.A.P.

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 17 Mai 2000, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Les parties **III** et **IV** sont indépendantes des parties **I** et **II**. On rappelle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}$

Partie I

On considère la fonction indéfiniment dérivable φ définie, pour tout réel x de $[0,1[$, par : $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

1) Pour tout réel x de $[0,1[$ et tout entier naturel n, établir l'égalité :

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{4^n\, n!}\,(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

où $\varphi^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de φ (avec, en particulier, $\varphi^{(0)} = \varphi$).

2) Pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0,1[$, justifier l'égalité suivante :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{C}_{2k}^{k}}{4^k}\,x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\varphi^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

3) a) Pour tout entier naturel n, prouver l'inégalité : $\mathrm{C}_{2n+2}^{n+1} \leqslant 4^{n+1}$.

b) Pour tout couple (t,x) de réels tel que $0 \leqslant t \leqslant x < 1$, vérifier les inégalités : $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$.

c) En déduire que, pour tout réel x de $[0,1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\varphi^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

4) Pour tout réel x de $[0,1[$, démontrer l'égalité :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{C}_{2k}^{k}}{4^k}\,x^k$$

Partie II

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$. Sur cet espace, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X_1, cette loi étant définie par

$$\mathbf{P}([X_1 = 1]) = \mathbf{P}([X_1 = -1]) = \frac{1}{2}$$

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Par exemple, S_n pourrait représenter l'abscisse (aléatoire) au temps n d'une particule se déplaçant sur un axe et partie de l'origine au temps 0, qui saute à chaque instant d'une unité à gauche ou d'une unité à droite avec une égale probabilité.

On note $\operatorname{Min} R$ le plus petit élément d'une partie non vide R de $\mathbb{N}$.
On pose aussi, pour tout élément ω de Ω, $R_\omega = \left\{n \in \mathbb{N}^*; S_n(\omega) = 0\right\}$ et $T(\omega) = \begin{cases} \operatorname{Min} R_\omega & \text{si } R_\omega \neq \emptyset. \\ 0 & \text{si } R_\omega = \emptyset. \end{cases}$
On **admet** que T est une variable aléatoire.
Ainsi T pourrait être le temps d'attente (aléatoire) du premier retour à l'origine de la particule évoquée plus haut.
Pour tout entier naturel n, on note E_n l'événement $E_n = [T > n] \cup [T = 0]$.

1) Soit n un entier naturel non nul. On pose $A_n = [S_n = 0]$ et, pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$A_k = \Big([S_k = 0] \cap [S_{k+1} \neq 0] \cap [S_{k+2} \neq 0] \ldots \cap [S_n \neq 0]\Big) = \Big([S_k = 0] \cap \Big(\bigcap_{i=k+1}^{n} [S_i \neq 0]\Big)\Big)$$

Ainsi, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, A_k serait l'événement :
« Pour la dernière fois avant l'instant n la particule est à l'origine à l'instant k ».

a) Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, justifier l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}([S_k = 0])\, \mathbf{P}(E_{n-k})$$

b) En déduire l'égalité :

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}([S_k = 0])\, \mathbf{P}(E_{n-k})$$

On admet que, si deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à termes **positifs ou nuls**, sont telles que les séries de termes généraux a_n et b_n convergent, alors en posant, pour tout entier naturel n, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, la série de terme général c_n converge et sa somme vérifie :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

2) Pour tout réel x de $[0, 1[$, établir l'égalité :

$$\frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([S_n = 0])\, x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(E_n)\, x^n\right)$$

3) a) Pour tout entier naturel n, calculer $\mathbf{P}([S_n = 0])$.

b) À l'aide de la partie I, en déduire que, pour tout réel x de $[0, 1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(E_n)\, x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

c) En remarquant que l'événement $[T = 0]$ est inclus dans E_n pour tout entier naturel n, montrer qu'on a : $\mathbf{P}([T = 0]) = 0$.

Ainsi, presque sûrement, la particule citée en exemple, revient à l'origine.

Partie III

On considère dans cette partie une suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout réel x de $[0,1[$, la série de terme général $a_k x^k$ converge. Pour tout réel x de $[0,1[$, on note $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ et l'on suppose que :

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 1} \left(\sqrt{1-x}\, f(x)\right) = \sqrt{\pi}$$

1) a) Pour tout entier naturel p, déterminer : $\lim_{x \underset{<}{\to} 1} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k}\right)$.

b) Pour tout entier naturel p, justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\, dt$, et, en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{2(p+1)t}$, calculer sa valeur.

c) En déduire l'égalité :

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 1} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\, dt$$

2) Montrer que, pour toute application polynomiale réelle Q, on a :

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 1} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k x^k Q(x^k)\right)\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} Q(e^{-t})\, dt$$

3) Soit h la fonction définie, pour tout réel x de $[0,1[$, par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{e}\right[\\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right[\end{cases} \quad \text{(ou } \left[\tfrac{1}{e}, 1\right] \ldots\text{)}$$

a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})\, dt$ et donner sa valeur.

b) Soit x un réel de $[0,1[$. En déterminant la valeur de $h(x^k)$ pour k assez grand, justifier la convergence de la série de terme général $a_k x^k h(x^k)$.

4) **On admet** l'égalité :

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 1} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k x^k h(x^k)\right)\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})\, dt$$

En utilisant ce résultat pour $x = e^{-\frac{1}{n}}$, en déduire que, lorsque l'entier naturel n tend vers l'infini, $\sum_{k=0}^{n} a_k$ est équivalent à $2\sqrt{n}$.

Partie IV

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **décroissante** de réels **positifs ou nuls** et, pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

On fait l'hypothèse que, lorsque n tend vers $+\infty$, S_n est équivalent à $2\sqrt{n}$. On va montrer qu'alors a_n est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

On notera $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.

1) Soit (α, β) un couple de nombres réels vérifiant : $0 < \alpha < 1 < \beta$. Pour tout entier naturel n tel que $n \neq \lfloor \alpha n \rfloor$ et $n \neq \lfloor \beta n \rfloor$, justifier l'encadrement :

$$\frac{S_{\lfloor \beta n \rfloor} - S_n}{\lfloor \beta n \rfloor - n} \leqslant a_n \leqslant \frac{S_n - S_{\lfloor \alpha n \rfloor}}{n - \lfloor \alpha n \rfloor}$$

2) a) Soit γ un réel strictement positif. Déterminer les limites des suites de termes généraux $\dfrac{n}{\lfloor \gamma n \rfloor}$ et $\dfrac{S_{\lfloor \gamma n \rfloor}}{\sqrt{n}}$.

b) Soit ε un réel strictement positif. Montrer que, pour tout entier naturel n assez grand, on a :

$$\frac{2(\sqrt{\beta}-1)}{\beta-1} - \varepsilon \leqslant \sqrt{n}\, a_n \leqslant \frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha} + \varepsilon$$

3) En déduire qu'on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, a_n = 1$.

Partie V

1) a) À l'aide des résultats obtenus dans les parties précédentes déterminer, quand l'entier naturel n tend vers l'infini, un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(T > k)$.

b) En déduire un équivalent de $\mathbf{P}(T > n)$.

2) La variable aléatoire T possède-t-elle une espérance ?

3) Pour tout réel x de $[0,1]$, prouver l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([T=n])\, x^n = 1 - \sqrt{1-x^2}$$

4) Soit n un entier naturel.

a) Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre n de la fonction $u \to \sqrt{1+u}$.

b) En déduire le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre $2n$ de la fonction $x \to 1-\sqrt{1-x^2}$.

c) Montrer que, au voisinage de 0 on a aussi :

$$1-\sqrt{1-x^2} = \sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}([T=k])\, x^k + o(x^{2n})$$

d) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathbf{P}([T=2n]) = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{4^n}$$

On rappelle qu'il y a unicité du développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre $2n$ d'une fonction.

Pour tout élément ω de Ω, on pose :

$R'_\omega = \left\{ n \in \mathbb{N}^* ; n > T(\omega) \text{ et } S_n(\omega) = 0 \right\}$ et $T_2(\omega) = \begin{cases} \operatorname{Min} R'_\omega & \text{si } R'_\omega \neq \emptyset. \\ 0 & \text{si } R'_\omega = \emptyset. \end{cases}$

On **admet** que T_2 est une variable aléatoire.

Ainsi T_2 pourrait être le temps d'attente (aléatoire) du deuxième retour à l'origine de la particule.

5) a) Pour tout entier naturel n non nul, démontrer l'égalité :

$$\mathbf{P}([T_2=2n]) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}([T=2k])\, \mathbf{P}([T=2n-2k])$$

b) En déduire la valeur de $\mathbf{P}([T_2=0])$ puis, pour tout réel x de $[0,1]$, l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([T_2=n])\, x^n = (1-\sqrt{1-x^2})^2$$

6) Déterminer la loi de T_2.