PRELIMINAIRE

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=1}^{n} k\,p(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\,(p(X>k-1)-p(X>k)) = \sum_{k=1}^{n} k\,p(X>k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\,p(X>k)$

$k \to k+1$

donc $\sum_{k=1}^{n} k\,p(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)p(X>k) - \sum_{\substack{k=1 \text{ ou } \underline{0}}}^{n} k\,p(X>k) = \sum_{k=0}^{n-1}[(k+1)-k]\,p(X>k) - n\,p(X>n)$

Finalement : $\underline{\underline{\sum_{k=1}^{n} k\,p(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} p(X>k) - n\,p(X>n)}}$

__Remarque__.. Ce résultat est la base de la démonstration de :

$E(X)$ existe $\Leftrightarrow$ la série de terme général $p(X>n)$ converge (en cas d'existence rappelons que : $E(X) = \sum_{k=\underline{\underline{0}}}^{+\infty} p(X>k)$)

PARTIE I c'est cette partie que j'ai refaite

Q1 $(p,s) \in \mathbb{N}^{*2}$. Pour construire une suite strictement croissante de p éléments de $[\![1,s]\!]$

1 $\to$ on choisit p éléments de $[\![1,s]\!]$

2 $\to$ on les ordonne dans l'ordre croissant

1er cas.. si $\underline{\underline{p>s \ : \ \text{card}\, \mathcal{D}_s = 0\,!}}$

2ème cas.. Supposons : $p \leq s$. Il y a C_s^p manières de choisir p éléments de $[\![1,s]\!]$ et une seule manière de les ordonner dans l'ordre croissant

Il y a donc C_s^p suites strictement croissantes de p éléments de $[\![1,s]\!]$.

donc si $\underline{\underline{p \leq s : \text{card}\, \mathcal{D}_s = C_s^p}}$.

Q2 * Soit $(c_1,c_2,\dots,c_p) \in \mathcal{C}_q$. $(c_1,c_2,\dots,c_p) \in \mathbb{N}^p$ et $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_p \leq q$.

Posons $(d_1,d_2,\dots,d_p) = \phi((c_1,c_2,\dots,c_p)) = (c_1, c_2+1, c_3+2, \dots, c_p+p-1)$.

Montrons que : $(d_1,d_2,\dots,d_p) \in \mathcal{D}_{p+q-1}$. Notons que : $\forall i \in [\![1,p]\!], d_i = c_i + i - 1$.

- Clairement : $(d_1,d_2,\dots,d_p) \in \mathbb{N}^p$.
- $\forall i \in [\![1,p-1]\!]$, $d_{i+1}-d_i = c_{i+1} + (i+1-1) - [c_i + (i-1)] = c_{i+1} - c_i + 1 \underset{c_{i+1} \geq c_i}{\geq} 1 > 0\,!$

donc $d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_p$. Or $d_1 = c_1 \geq 1$ et $d_p = c_p + p - 1 \underset{c_p \leq q}{\leq} q+p-1 = p+q-1$

donc $1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_p \leq p+q-1$ et : $(d_1,d_2,\dots,d_p) \in \mathcal{D}_{p+q-1}$

Ceci achève de prouver que $\phi((c_1,c_2,\dots,c_p)) \in \mathcal{D}_{p+q-1}$ si $(c_1,c_2,\dots,c_p) \in \mathcal{C}_q$.

<u>ϕ est une application de $\mathcal{C}_q$ dans $\mathcal{D}_{p+q-1}$</u>.

Montrons que ϕ est bijective c'est à dire que tout élément de $\mathcal{D}_{p+q-1}$ admet un antécédent et un seul par ϕ dans $\mathcal{C}_q$.

Soit $(d_1,d_2,\dots,d_p) \in \mathcal{D}_{p+q-1}$. Montrons que : $\exists!\, (c_1,c_2,\dots,c_p) \in \mathcal{C}_q,\ \phi((c_1,c_2,\dots,c_p)) = (d_1,d_2,\dots,d_p)$

<u>Analyse / Unicité / Injectivité</u> !

Supposons que : $(c_1,c_2,\dots,c_p) \in \mathcal{C}_q$ et $\phi((c_1,c_2,\dots,c_p)) = (d_1,d_2,\dots,d_p)$.

Alors $(c_1, c_2+1, \dots, c_p+p-1) = (d_1,d_2,\dots,d_p)$. $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $c_i + i - 1 = d_i$

$\underline{\underline{\forall i \in [\![1,p]\!],\ c_i = d_i + 1 - i}}$

Donc $(c_1,c_2,\dots,c_p) = (d_1, d_2+1-2, d_3+1-3, \dots, d_p+1-p)$

d'où l'unicité de $(c_1,c_2,\dots,c_p)$ élément de $\mathcal{C}_q$ tel que $\phi((c_1,c_2,\dots,c_p)) = (d_1,d_2,\dots,d_p)$

(d'où l'injectivité de ϕ).

<u>Synthèse / Existence / Surjectivité</u>.

Soit $(d_1,d_2,\dots,d_p) \in \mathcal{D}_{p+q-1}$. $1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_p \leq p+q-1$ et $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $d_i \in \mathbb{N}$.

<u>Posons</u> $(c_1,c_2,\dots,c_p) = (d_1, d_2+1-2, d_3+1-3, \dots, d_p+1-p)$ c'est à dire que :

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $c_i = d_i + 1 - i$

Montrons alors que : $(c_1,c_2,\dots,c_p) \in \mathcal{C}_q$ et $\phi((c_1,c_2,\dots,c_p)) = (d_1,d_2,\dots,d_p)$.

$\forall i \in [\![1,p-1]\!]$, $c_{i+1} - c_i = d_{i+1} + 1 - i - 1 - d_i - 1 + i = d_{i+1} - d_i - 1$

Or $\forall i \in [\![1,p-1]\!]$, $d_{i+1} - d_i > 0$; mieux $\forall i \in [\![1,p-1]\!]$, $d_{i+1} - d_i \geq 1$ ($d_{i+1} - d_i$ est un entier)

Donc $\forall i \in [\![1,p-1]\!]$, $c_{i+1} - c_i = d_{i+1} - d_i - 1 \geq 0$; $\forall i \in [\![1,p-1]\!]$, $c_{i+1} \geq c_i$.

Par conséquent : $1 \leq d_1 = c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_p = d_p + 1 - p \leq p+q-1+1-p = q$;

$1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_p \leq q$; de plus $c_1, c_2, \dots, c_p$ sont des entiers (car les d_i le sont)

Donc $(c_1,c_2,\dots,c_p) \in \mathbb{N}^p$ et $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_p \leq q$. $(c_1,c_2,\dots,c_p) \in \mathcal{C}_q$.

De plus : $\phi((c_1,c_2,\dots,c_p)) = (c_1, c_2+1, \dots, c_p+p-1) = (d_1, d_2+1-2+1, d_3+1-3+2, \dots, d_p+1-p+p-1)$

$\phi((c_1,c_2,\dots,c_p)) = (d_1, d_2, d_3, \dots, d_p)$

$(c_1,c_2,\dots,c_p)$ est un antécédent de $(d_1,d_2,\dots,d_p)$ par ϕ dans $\mathcal{C}_q$ ... fin de la synthèse.

Ceci achève de prouver que ϕ est bijective.

$\mathcal{C}_q$ et $\mathcal{D}_{p+q-1}$ sont alors équipotents. $\operatorname{card} \mathcal{C}_q = \operatorname{card} \mathcal{D}_{p+q-1} \underset{\substack{\uparrow \\ p+q-1 \geq p \text{ et } Q1}}{=} C_{p+q-1}^{p}$

Donc $\underline{\underline{\operatorname{card} \mathcal{C}_q = C_{p+q-1}^{p}}}$.

Remarques 1. Ceci est à mettre en relation avec $\Gamma_q^p = \operatorname{card} \{(t_1, t_2, \dots, t_q) \in \mathbb{N}^q \mid t_1 + t_2 + \dots + t_q = p\}$

2. C_{p+q-1}^{p} est encore le nombre d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$.

à méditer

PARTIE II

Tirages SANS remise.

(Q1) L'univers Ω est l'ensemble des N listes sans répétition de l'ensemble $[\![1, N]\!]$.

Donc $\underline{\operatorname{card} \Omega = N!}$

Soit $n \in [\![0, N-1]\!]$.

Si $n = 0$: $p(X_N > n) = p(X_N > 0) = 1 = \frac{1}{(0+1)!}$. Supposons $n \geq 1$.

tirages sans remise !!

$\underline{\{X_N > n\} \text{ est réalisé si et seulement si les } n+1 \text{ premiers tirages donnent une suite strictement croissante}}$; les $N-(n+1)$ tirages suivants étant constitués avec les $N-(n+1)$ numéros non encore sortis.

Par conséquent : $p(X_N > n) = \frac{1}{N!} \underbrace{C_N^{n+1}}_{\text{nombre de suites strictement croissantes de } n+1 \text{ éléments de } [\![1,N]\!]} \underbrace{(N-(n+1))!}_{\text{nb. de choix des } N-(n+1) \text{ jetons sortant aux } N-(n+1) \text{ derniers tirages}}$

Donc $p(X_N > n) = \frac{1}{N!} \frac{N!}{(n+1)!(N-n-1)!} \times (N-n-1)! = \frac{1}{(n+1)!}$

Finalement : $\forall n \in [\![0, N-1]\!],\ p(X_N > n) = \frac{1}{(n+1)!}$

Notons que : $\underline{\underline{p(X_N > N) = 0}}$ (X_N prend ses valeurs dans $[\![1, N]\!]$).

Bien évidemment : $\underline{\underline{\forall n \in [\![N+1, +\infty[\![,\ p(X_N > n) = 0.}}$

(Q2). $X_N(\Omega) = [\![1, N]\!]$.

Soit $k \in [\![1, N]\!]$. $p(X_N = k) = p(X_N > k-1) - p(X_N > k)$

Notons que $k-1 \in [\![0, N-1]\!]$. Donc $p(X_N = k) = \frac{1}{(k-1+1)!} - p(X_N > k)$.

Distinguons alors deux cas :

Si $k \neq N$: $p(X_N > k) = \frac{1}{(k+1)!}$ et si $k = N$: $p(X_N > k) = 0$.

Il vient alors, pour $k \neq N$: $p(X_N = k) = \frac{1}{(k-1+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}$;

pour $k = N$: $p(X_N = k) = \frac{1}{(k-1+1)!} - 0 = \frac{1}{k!} = \frac{1}{N!}$

Finalement : $\forall k \in [\![1, N-1]\!],\ p(X_N = k) = \frac{k}{(k+1)!}$ et $p(X_N = N) = \frac{1}{N!}$.

$$E(X_N) = \sum_{k=1}^{N} k\, p(X_N = k) \underset{\text{préliminaire}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} p(X_N > k) - N\, p(X_N > N) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)!} - N \times 0$$

$$E(X_N) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}.$$

Q3 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$; $e - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \right) = \lim_{N \to +\infty} E(X_N)$.

$$\lim_{N \to +\infty} E(X_N) = e - 1$$

Q4 Soit $k \in \mathbb{N}^*$

La suite $(p(X_N = k))_{N \geq 3}$ est constante à partir d'un certain rang !

$\forall N \in [\![3, +\infty[\![\cap [\![k+1, +\infty[\![$: $p(X_N = k) = \frac{k}{(k+1)!}$; $\lim_{N \to +\infty} p(X_N = k) = \frac{k}{(k+1)!}$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{N \to +\infty} p(X_N = k) = \frac{k}{(k+1)!}.$$

Pour montrer qu'il existe une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p(X = k) = \lim_{N \to +\infty} p(X_N = k)$ il suffit de prouver que :

$g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $k \mapsto \frac{k}{(k+1)!}$ est une loi de probabilité ; c'est à dire que :

- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $g(k) \in [0, 1]$.
- $\sum_{k=1}^{+\infty} g(k) = 1$

Le premier point est clair, montrons le second.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{p} g(k) = \sum_{k=1}^{p} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = 1 - \frac{1}{(p+1)!}$$

donc $\lim_{p\to+\infty} \sum_{\ell=1}^{p} g(\ell) = \lim_{p\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{(p+1)!}\right) = 1$; $\sum_{\ell=1}^{+\infty} g(\ell) = 1$

g est une loi de probabilité.

Soit X une var de loi g.

X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p(X=k) = \frac{k}{(k+1)!} = \lim_{N\to+\infty} p(X_N = k)$

Remarque. $(X_N)_{N\geqslant 3}$ converge en loi vers X.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $k\,p(X=k) \geqslant 0$ et $k\,p(X=k) = \frac{k^2}{(k+1)!} = \frac{k(k+1)-(k+1)+1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!}$

La série de terme général $k\,p(X=k)$ est alors convergente, et donc absolument convergente (car à termes positifs) comme combinaison linéaire de trois séries convergentes.

Donc 1 → E(X) existe

2 → $E(X) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ell-1)!} - \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ell+1)!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} - \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} + \sum_{\ell=2}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}$

$E(X) = e - (e-1) + (e-1-1) = e-1$

$E(X) = e-1 = \lim_{N\to+\infty} E(X_N)$! Le soufflé retombe très vite ! OK ! Voir l'algorithmique à la fin.

PARTIE III

Désormais les tirages se font avec remise.

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$.

$\mathrm{card}\{(\bar u_1, \bar u_2, \dots, \bar u_n) \in [\![1,N]\!]^n \mid \bar u_1 \leqslant \bar u_2 \leqslant \dots \leqslant \bar u_n\} = \mathrm{card}\{(\bar u_1, \bar u_2, \dots, \bar u_n) \in \mathbb{N}^n \mid 1 \leqslant \bar u_1 \leqslant \bar u_2 \leqslant \dots \leqslant \bar u_n \leqslant N\}$

donc $\mathrm{card}\{(\bar u_1, \bar u_2, \dots, \bar u_n) \in [\![1,N]\!]^n \mid \bar u_1 \leqslant \bar u_2 \leqslant \dots \leqslant \bar u_n\} = C_{n+N-1}^{n}$ ← QIQ2

← $\bar u_i$: couleur u_i : dans le texte sont sans doute des var...

Notons encore qu'il y a N^n manières de faire n tirages avec remise.

Par conséquent : $v_n = p(u_1 \leqslant u_2 \leqslant \dots \leqslant u_n) = \frac{C_{n+N-1}^{n}}{N^n}$

Dans la suite nous posons $v_1 = 1 = \dots = C_{1+N-1}^{1}/N^1$!

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{C_{n+N-1}^{n}}{N^n}$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$C^n_{N+n-1} = C^{N-1}_{N+n-1} = \frac{(N+n-1)(N+n-2)\dots(N+n-1-(N-1)+1)}{(N-1)!} = \frac{1}{(N-1)!}\prod_{k=1}^{N-1}(N+n-k)$$

Or $\forall k \in [\![1, N-1]\!]$, $\quad N+n-k \underset{n\to+\infty}{\sim} n \quad ; \quad C^n_{N+n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{N-1}}{(N-1)!}$

Donc les suites $(C^n_{N+n-1})_{n\geq 1}$ et $\left(\frac{n^{N-1}}{(N-1)!}\right)_{n\geq1}$ sont équivalentes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = C^n_{n+N-1}/N^n \sim \frac{1}{(N-1)!}\frac{n^{N-1}}{N^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(n^3 v_n) = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{(N-1)!}\frac{n^{N+2}}{N^n}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(N-1)!}e^{(N+2)\ln n - n\ln N} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(N-1)!}e^{n\left[(N+2)\frac{\ln n}{n} - \ln N\right]} = 0$$

$$\begin{cases} -\ln N < 0 \\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = 0 \end{cases}$$

$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow n^3 v_n \leq 1$

$\forall n \in \mathbb{N}, n\geq p \Rightarrow 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^3}$ et... $\quad 0 \leq n v_n \leq \frac{1}{n^2}$!

La série de terme général $\frac{1}{n^3}$ (resp. $\frac{1}{n^2}$) étant convergente, les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général v_n (resp. nv_n) converge.

Cl... la série de terme général v_n (resp. $n v_n$) converge.

$\forall p \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \quad \sum_{n=1}^{p-1} w_n = \sum_{n=1}^{p-1}(v_n - v_{n+1}) = v_1 - v_p = 1 - v_p$

$\lim_{p\to+\infty} v_p = 0$ car la série de terme général v_n converge ; donc $\lim_{p\to+\infty}\sum_{n=1}^{p-1} w_n = 1$

Cl... la série de terme général $w_n = v_n - v_{n+1}$ converge et : $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = 1$.

Q3 Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

Notons A'_r l'événement : r est le plus petit entier tel que $u_r > u_{r+1}$

$A'_r = \{u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r\} \setminus \{u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r \leq u_{r+1}\}$

Comme $\{u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r \leq u_{r+1}\} \subset \{u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r\}$: $p(A'_r) = p(u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r) - p(u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r \leq u_{r+1})$

$\forall r \in \mathbb{N}^*, \ p(A'_r) = v_r - v_{r+1} = w_r$.

En particulier : $p\left(\bigcup_{r=1}^{+\infty} A'_r\right) = \sum_{r=1}^{+\infty} p(A'_r) = \sum_{r=1}^{+\infty} w_r = 1$.

événements 2 à 2 disjoints

$\bigcup_{r=1}^{+\infty} A'_r$ est donc un événement quasi-certain ; il est donc quasi-certain d'avoir l'existence d'un plus petit r tel que $u_r > u_{r+1}$ (ou il est quasi-impossible d'avoir une suite croissante, au sens large, de résultats). Ceci autorise alors à parler de la variable aléatoire Z_N donnant le plus petit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que : $u_r > u_{r+1}$.

Notons que : $\forall r \in \mathbb{N}^*, \ p(Z_N = r) = p(A'_r) = w_r = v_r - v_{r+1}$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$

Le préliminaire donne : $\sum_{n=1}^{m} n\, p(Z_N = n) = \sum_{n=0}^{m-1} p(Z_N > n) - m\, p(Z_N > m)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ p(Z_N > n) = p(u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_{n+1}) = v_{n+1}$

$p(Z_N > 0) = 1 = v_1 = v_{0+1}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ p(Z_N > n) = v_{n+1}$.

Par conséquent : $\sum_{n=1}^{m} n\, p(Z_N = n) = \sum_{n=0}^{m-1} v_{n+1} - m\, v_{m+1} = \sum_{n=1}^{m} v_n - m\, v_{m+1}$

$\forall m \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{n=1}^{m} n\, p(Z_N = n) = \sum_{n=1}^{m} v_n - m\, v_{m+1}$.

Rappelons que la série de terme général $m\, v_m$ converge, donc $\lim_{m \to +\infty} (m\, v_m) = 0$ ou $\lim_{m \to +\infty} [(m+1) v_{m+1}] = 0$.

Par conséquent : $\lim_{m \to +\infty} m\, v_{m+1} = \lim_{m \to +\infty} \left[\frac{m}{m+1} \times (m+1) v_{m+1}\right] = 1 \times 0 = 0$.

La série de terme général v_n étant convergente il vient alors :

$\lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{m} n\, p(Z_N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$. Ceci prouve que la série de terme général $n\, p(Z_N = n)$ est convergente, et donc absolument convergente (car à termes positifs) et de somme : $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$

Finalement $E(Z_N)$ existe et vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

(Q4) a) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur I ET que : $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, C_{N+n-1}^{n} \frac{1}{(1+x)^{N+n}}$

- C'est clair pour $n=0$.
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

  $f^{(n)}$ est une fonction rationnelle sur I ; $f^{(n)}$ est donc dérivable sur I ; f est donc $n+1$ fois dérivable sur I.

$\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, C_{N+n-1}^{n} (1+x)^{-N-n}$. $\forall x \in I$, $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!\, C_{N+n-1}^{n}(-N-n)(1+x)^{-N-n-1}$

donc $\forall x \in I$, $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!\, \underbrace{\frac{N+n}{n+1} C_{N+n-1}^{n}}_{C_{N+n}^{n+1} = C_{N+(n+1)-1}^{n+1}} \frac{1}{(1+x)^{N+n+1}} = (-1)^{n+1}(n+1)!\, C_{N+(n+1)-1}^{n+1} \frac{1}{(1+x)^{N+n+1}}$

ceci achève la récurrence.

CL.. f est C^∞ sur I et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, C_{N+n-1}^{n} \frac{1}{(1+x)^{N+n}}$.

b) f est C^∞ sur $[-\frac{1}{N}, 0]$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre m sur $[-\frac{1}{N}, 0]$ $(m \in \mathbb{N}^*)$.

$$\left| f(-\tfrac{1}{N}) - \sum_{n=0}^{m} \frac{(-\frac{1}{N}-0)^n}{n!} f^{(n)}(0) \right| \leq \frac{|-\frac{1}{N}-0|^{m+1}}{(m+1)!} \max_{t \in [-\frac{1}{N}, 0]} |f^{(m+1)}(t)|.$$

$f(-\frac{1}{N}) = \frac{1}{(1-\frac{1}{N})^N}$; $\frac{(-\frac{1}{N}-0)^0}{0!} f^{(0)}(0) = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(-\frac{1}{N}-0)^n}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n}{N^n n!} (-1)^n n!\, C_{N+n-1}^{n} \frac{1}{(1+0)^{N+n}}$;

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(-\frac{1}{N}-0)^n}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{C_{N+n-1}^{n}}{N^n} = v_n$.

$\max_{t \in [-\frac{1}{N}, 0]} |f^{(m+1)}(t)| = \max_{t \in [-\frac{1}{N}, 0]} \left| (-1)^{m+1}(m+1)!\, C_{N+m+1-1}^{m+1} \frac{1}{(1+t)^{N+m+1}} \right| = (m+1)!\, C_{N+m}^{m+1} \underbrace{\max_{t \in [-\frac{1}{N}, 0]} \frac{1}{|1+t|^{N+m+1}}}_{\frac{1}{(1-\frac{1}{N})^{N+m+1}}}$.

donc $\max_{t \in [-\frac{1}{N}, 0]} |f^{(m+1)}(t)| = (m+1)!\, C_{N+m}^{m+1} \frac{1}{(1-1/N)^{N+m+1}}$.

En remplaçant dans l'inégalité il vient :

$$\left|\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^N} - 1 - \sum_{n=1}^{m} v_n\right| \leq \frac{1}{N^{m+1}}\,\frac{1}{(m+1)!}\,(m+1)!\,C_{N+m}^{m+1}\,\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N+m+1}} = \frac{C_{N+m+1-1}^{m+1}}{N^{m+1}}\,\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N+m+1}}$$

Donc $\left|\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^N} - 1 - \displaystyle\sum_{n=1}^{m} v_n\right| \leq \dfrac{v_{m+1}}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N+m+1}}$.

En notant que : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{v_{m+1}}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N+m+1}} \overset{*}{=} 0$ nous aurons alors :

$$\lim_{m\to+\infty}\left|\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^N} - 1 - \sum_{n=1}^{m} v_n\right| = 0 \quad \text{or : } \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m} v_n = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^N} - 1$$

ce qui donnera : $E(Z_N) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^N} - 1$. Ne reste plus qu'à montrer *

$$\frac{v_{m+1}}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N+m+1}} \sim \frac{1}{(N-1)!}\,\frac{(m+1)^{N-1}}{N^{m+1}} \times \left(\frac{N}{N-1}\right)^{N+m+1} = \frac{1}{(N-1)!}\left(\frac{N}{N-1}\right)^{N}\,\frac{(m+1)^{N-1}}{(N-1)^{m+1}}$$

Ne reste donc plus qu'à montrer que : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\frac{(m+1)^{N-1}}{(N-1)^{m+1}} = 0$

Or, $\dfrac{(m+1)^{N-1}}{(N-1)^{m+1}} = e^{(N-1)\ln(m+1)-(m+1)\ln(N-1)} = e^{(m+1)\left[(N-1)\frac{\ln(m+1)}{m+1} - \ln(N-1)\right]} \to 0$

$\left\{\begin{array}{l} -\ln(N-1) < 0 \text{ et} \\ \displaystyle\lim_{m\to+\infty}\frac{\ln(m+1)}{m+1} = 0 \end{array}\right.$ $(N \geq 3)$.

Ceci achève donc de prouver que : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\frac{v_{m+1}}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N+m+1}} = 0$.

$$\lim_{N\to+\infty} E(Z_N) = \lim_{N\to+\infty}\left[e^{-N\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)} - 1\right] = e - 1$$

$\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left[-N\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)\right] = 1$ car $-N\ln\left(1-\frac{1}{N}\right) \sim -N\left(-\frac{1}{N}\right) = 1$

Donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} E(Z_N) = e - 1$.

Q5 Soit $k\in\mathbb{N}^*$

$p(Z_N=k)=v_k-v_{k+1}$.

$$v_k=\frac{C_{N+k-1}^{k}}{N^k}\underset{N\to+\infty}{\sim}\frac{(N+k-1)^k}{k!}\times\frac{1}{N^k}=\frac{1}{k!}\left(1+\frac{k-1}{N}\right)^k\underset{N\to+\infty}{\sim}\frac{1}{k!}$$

donc $\underbrace{\lim_{N\to+\infty} v_k}_{!}=\frac{1}{k!}$. $\lim_{N\to+\infty} p(Z_N=k)=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}=g(k)$!

g étant une loi de probabilité (II Q4) il est alors clair que l'on peut trouver une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ p(Z=k)=\lim_{N\to+\infty} p(Z_N=k)$.

Remarque.- Pour N grand II Q4 et III Q5 montrent qu'avec remise ou sans remise c'est la même chose ! Alors on la remet, non ?! Q6 → p.14

PARTIE IV

Q1.- $k\in[\![1,N]\!]$ et $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $k<u_{i+1}$ signifie que les tirages $2,3,\dots,n+1$ ont amené un numéro strictement supérieur à k.

Si $k=N$ la probabilité correspondante est nulle.

Si $k<N$ la probabilité est $\left(\frac{N-k}{N}\right)^n$

dans les deux cas la probabilité cherchée est $\left(\frac{N-k}{N}\right)^n$.

Notons T_1 la var égale au numéro obtenu au premier tirage (en fait $T_1=u_1$!?)

$$p(A_n)=\sum_{k=1}^{N}p(A_n\cap T_1=k)=\sum_{k=1}^{N}p(A_n/T_1=k)\,p(T_1=k)=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{N-k}{N}\right)^n\frac{1}{N}$$

donc $p(A_n)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n$

Q2 Notons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n$!

$\forall k \in [\![1,N]\!]$, $\left|1-\frac{k}{N}\right|<1$. donc pour tout $k\in[\![1,N]\!]$, la série de terme général $\left(1-\frac{k}{N}\right)^n$ converge ; la série de terme général x_n est alors convergente comme combinaison linéaire de séries convergentes.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1-\left(1-\frac{k}{N}\right)} = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$$

$$\underline{\underline{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}.}}$$

Q3 Notons B_r l'événement r est le plus petit élément de $\mathbb{N}^*$ tel que $u_{r+1}\leq \min(u_1,u_2,\dots,u_r)$.
Il s'agit alors de prouver que : $p\left(\bigcup_{r=1}^{+\infty}B_r\right)=\sum_{r=1}^{+\infty}p(B_r)=1$

Si $r=1$: $p(B_1)=p(u_2\leq u_1)$

Si $r\geqslant 2$ B_r est réalisé si et seulement si
$$\begin{cases} u_2>\min(u_1) \\ u_3>\min(u_1,u_2) \\ \dots\dots\dots \\ u_r>\min(u_1,u_2,\dots,u_r) \\ u_{r+1}\leq\min(u_1,u_2,\dots,u_r) \end{cases}$$

donc B_r est réalisé si et seulement si
$$\begin{cases} u_2>u_1 \\ u_3>u_1 \\ \dots\dots \\ u_r>u_1 \\ u_{r+1}\leq u_1 \end{cases}$$

donc B_r " $=$ " $\{\forall i\in[\![2,r]\!],\ u_1<u_i\}-\{\forall i\in[\![2,r+1]\!],\ u_1<u_i\}$ "
B_r " $=$ " $\{\forall i\in[\![1,r-1]\!],\ u_1<u_{i+1}\}-\{\forall i\in[\![1,r]\!],\ u_1<u_{i+1}\}$ " $=A_{r-1}\setminus A_r$

Comme $A_r\subset A_{r-1}$: $p(B_r)=p(A_{r-1})-p(A_r)=x_{r-1}-x_r$

$\forall r\in[\![2,+\infty[\![$, $p(B_r)=x_{r-1}-x_r$ et $p(B_1)=p(u_2\leq u_1)=1-p(u_2>u_1)=1-p(A_1)$

$\forall r\in[\![2,+\infty[\![$, $p(B_r)=x_{r-1}-x_r$ et $p(B_1)=1-x_1=x_0-x_1$

Finalement : $\underline{\underline{\forall r\in\mathbb{N}^*,\ p(B_r)=x_{r-1}-x_r.}}$

Il reste donc plus qu'à prouver que : $\sum_{r=1}^{+\infty}(x_{r-1}-x_r)=1$

ou : $\sum_{r=1}^{p}(x_{r-1}-x_r) = x_0 - x_p = 1 - x_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et :

$\lim\limits_{p\to+\infty} x_p = \lim\limits_{p\to+\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N}(1-\frac{\ell}{N})^p\right] = \frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N} 0 = 0 \qquad (\forall \ell \in [\![1,N]\!],\ |1-\frac{\ell}{N}|<1)$.

Il est donc quasi-certain de pouvoir ~~trouver un~~ plus petit entier strictement positif r tel que : $u_{r+1} \leq \inf(u_1,u_2,\dots,u_r)$. Ceci autorise à parler de la variable aléatoire T_N prenant la valeur de ce plus petit entier.

Notons encore que : $\underline{\forall r \in \mathbb{N}^*,\ p(T_N=r) = x_{r-1}-x_r}$.

(Q4) $\forall r \in \mathbb{N}^*,\ r\,p(T_N=r) \geqslant 0$.

Pour prouver que $E(T_N)$ existe il suffit alors de montrer que la série de terme général $r\,p(T_N=r)$ converge c'est à dire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{r=1}^{n} r\,p(T_N=r)$ existe

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{r=1}^{n} r\,p(T_N=r) = \sum_{r=0}^{n-1} p(T_N>r) - n\,p(T_N>n)$ (préliminaire).

$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ p(T_N>r) = p(u_2>\inf(u_1) \cap u_3>\inf(u_1,u_2) \cap \dots \cap u_{r+1}>\inf(u_1,u_2,\dots,u_r))$

$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ p(T_N>r) = p(\{\forall i \in [\![2,r+1]\!],\ u_1<u_i\}) = p(\{\forall i \in [\![1,r]\!],\ u_1<u_{i+1}\})$

$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ p(T_N>r) = x_r$. Ceci vaut encore pour $r=0$ car $p(T_N>0)=1=x_0$.

Finalement $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{r=1}^{n} r\,p(T_N=r) = \sum_{r=0}^{n-1} x_r - n x_n}$

Notons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n x_n = 0$. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n x_n = \frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N} n(1-\frac{\ell}{N})^n \overset{\text{ok ?}}{=} \frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N-1} n(1-\frac{\ell}{N})^n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n x_n = \frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N-1} e^{n\left[\ln(1-\frac{\ell}{N}) + \frac{\ln n}{n}\right]}$

$\forall \ell \in [\![1,N-1]\!],\ \ln(1-\frac{\ell}{N})<0$ donc $\forall \ell \in [\![1,N-1]\!],\ \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\left[\ln(1-\frac{\ell}{N}) + \frac{\ln n}{n}\right]} = 0$.

Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} n x_n = \frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N-1} 0 = 0$.

Rappelons que la série de terme général x_n converge et que : $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{\ell=1}^{N}\frac{1}{\ell}$

Finalement : $\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{r=1}^{n} r\,p(T_N=r)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{r=0}^{n-1} x_r - n x_n\right] = \sum_{r=0}^{+\infty} x_r = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$

Cl.- $E(T_N)$ existe et vaut $\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$.

La série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge et est à termes positifs ; par conséquent la suite de ses sommes partielles admet pour limite $+\infty$.
Donc $\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\right) = +\infty$.

Cl.. $\lim_{N\to+\infty} E(T_N) = +\infty$. $\left(E(T_N) = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \sim \ln(N)\right)$.

Q5. Rappelons que Q4 nous a donné : $\forall n\in\mathbb{N}$, $p(T_N>n) = x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n$

x_n est donc une somme de Riemann pour tout $n\in\mathbb{N}$! Soit $n\in\mathbb{N}$.
Posons $\varphi : t\mapsto (1-t)^n$. φ est continue sur $[0,1]$.
$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi\left(\frac{k}{N}\right)$; donc $\lim_{N\to+\infty} p(T_N>n) = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi\left(\frac{k}{N}\right) = \int_0^1 \varphi(t)\,dt$

$\lim_{N\to+\infty} p(T_N>n) = \int_0^1 (1-t)^n\,dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\lim_{N\to+\infty} p(T_N>n) = \frac{1}{n+1}$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\lim_{N\to+\infty} p(T_N=n) = \lim_{N\to+\infty}\left[p(T_N>n-1) - p(T_N>n)\right] = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\lim_{N\to+\infty}\left[p(T_N=n)\right] = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$.

Ici encore prouver qu'il existe une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ revient à prouver que : $h : \mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$, $n\mapsto \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ est une loi de probabilité.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $h(n) = \frac{1}{n(n+1)}\in[0,1]$ et $\lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{p} h(n)\right) = \lim_{p\to+\infty}\left[\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right] = \lim_{p\to+\infty}\left(1-\frac{1}{p+1}\right) = 1$.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} h(n) = 1$. Ceci achève de prouver que h est une loi de probabilité.
Il existe donc une v.a. T à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $p(T=k) = \lim_{N\to+\infty} p(T_N=k)$

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $p(T=k) = \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$. $k\,p(T=k) = \frac{1}{k+1} \sim \frac{1}{k}$. T n'a pas d'espérance.