ESSEC
ÉCOLE SUPÉRIEURE DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET COMMERCIALES
Etablissement Privé d'Enseignement Supérieur Reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION de 1981

MATHEMATIQUES - 2ème épreuve

(Coef. 4)

Mercredi 6 mai 1981 de 8h à 12h

Les parties II, III, IV, sont, dans une large mesure, indépendantes.

Question préliminaire : Montrer que, si X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$\sum_{k=1}^{n} k\,P(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - n\,P(X>n)$$

- I -

1. Soient p et q deux entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant q$. Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1, 2, ..., p\}$ dans $\{1, 2, ..., q\}$?

2. n et r désignant deux entiers naturels non nuls, on note :

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ f : \begin{array}{ccc} \{1, 2, ..., n\} & \longrightarrow & \{1, 2, ..., r\} \\ i & \longmapsto & f(i) \end{array} \text{ telle que } \sum_{i=1}^{n} f(i) \leqslant n + r - 1 \right\}.$$

et $\mathcal{F}_2$ l'ensemble des applications strictement croissantes de $\{1, 2, ..., n\}$ dans $\{1, 2, ..., n + r - 1\}$.

Montrer que l'application Φ de $\mathcal{F}_1$ dans $\mathcal{F}_2$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{F}_1 ,\ \forall k \in \{1, 2, ..., n\} \quad \Phi(f)(k) = \sum_{i=1}^{k} f(i) \text{ est une bijection.}$$

En déduire le cardinal de $\mathcal{F}_1$.

./.

3. n, N, m désignant des entiers naturels non nuls tels que $n \leqslant m \leqslant N + n - 1$, déduire des résultats précédents le nombre de n-uplets $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ éléments de $\{1, 2, \ldots, N\}^n$:

   a) tels que $u_1 + u_2 + \ldots + u_n \leqslant m$

   b) tels que $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = m$

   c) tels que $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$ (on supposera ici $n \geqslant 2$)

   d) tels que $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n$ (on pourra remarquer qu'un tel n-uplet est entièrement défini par les nombres, éventuellement nuls, $y_1, y_2 \ldots y_N$ de 1, de 2, ... de N qui y figurent, puis prendre comme inconnues $1+y_1, 1+y_2, \ldots 1+y_N$ de façon à utiliser I-3-b convenablement adapté).

A titre indicatif, et en vue de leur utilisation éventuelle dans la suite du problème, les réponses aux questions 3 a), b), c), d) sont respectivement :

C_m^n , C_{m-1}^{n-1} , C_N^n (si $n \leqslant N$) , C_{N+n-1}^n .

Dans toute la suite, <u>N désigne un entier supérieur ou égal à 3</u>, et l'on considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N.

<u>Dans la partie II</u>, on tire "au hasard et <u>sans</u> remise" chacun des jetons de cette urne et l'on note $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ la suite des nombres ainsi obtenus.

<u>Dans les parties III, IV,</u> on tire "au hasard et <u>avec</u> remise" des jetons de cette urne et l'on note $(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ la suite des nombres ainsi obtenus.

- II -

Soit X_N la variable aléatoire égale au plus petit entier $r \geqslant 1$, s'il existe, tel que $u_r > u_{r+1}$, sinon à N .

1. $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(X_N > n)$.

2. En déduire la loi de probabilité de X_N et son espérance mathématique $E(X_N)$.

3. Déterminer $\lim\limits_{N \to +\infty} E(X_N)$.

./.

4. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X=k) = \lim_{N \to +\infty} P(X_N = k) .$$

Démontrer que X possède une espérance mathématique, et la comparer à $\lim\limits_{N \to +\infty} E(X_N)$.

- III -

1. Calculer, pour n entier supérieur ou égal à 2, $v_n = P(u_1 \leqslant u_2 \dots \leqslant u_n)$.
   On pose, dans la suite, $v_1 = 1$.

2. Montrer que les séries de termes généraux respectifs v_n, nv_n, et $w_n = v_n - v_{n+1}$ convergent. Que vaut $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n$?

3. En déduire l'existence d'une variable aléatoire Z_N, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que $Z_N = r$ si et seulement si r est le plus petit entier tel que $u_r > u_{r+1}$.
   Montrer que Z_N admet une espérance mathématique $E(Z_N) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$.

4. Ecrire la formule de Mac-Laurin, avec reste de Lagrange, pour la fonction :
   $x \longmapsto (1+x)^{-N}$; en déduire une expression de $\sum\limits_{n=1}^{p} v_n$, puis $E(Z_N)$.
   Déterminer $\lim\limits_{N \to +\infty} E(Z_N)$.

5. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(Z = k) = \lim_{N \to +\infty} P(Z_N = k) .$$

   Comparer Z et X.

- IV -

1. k appartenant à $\{1, 2, \dots, N\}$, quelle est la probabilité de l'évènement :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad k < u_{1+i}$$ (où n désigne un entier supérieur ou égal à 1).

En déduire, pour n élément de $\mathbb{N}^*$, la probabilité de l'événement A_n défini par :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad u_i < u_{i+1}$$

2. Montrer que la série de terme général x_n défini par $x_0 = 1$ et $x_n = P(A_n)$ si $n \geqslant 1$, converge et calculer sa somme.

3. Prouver l'existence d'une variable aléatoire T_N, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que $T_N = r$ si et seulement si r est le plus petit entier strictement positif tel que :

$$u_{r+1} \leqslant \operatorname{Inf}(u_1, u_2, \dots, u_r) .$$

4. Montrer que T_N admet une espérance mathématique que l'on calculera.

   Déterminer $\lim\limits_{N\to+\infty} E(T_N)$.

5. $n \in \mathbb{N}$; déterminer, en utilisant la valeur moyenne de la fonction : $x \longmapsto x^n$ sur $[0,1]$, $\lim\limits_{N\to+\infty} P(T_N > n)$.

   Montrer qu'il existe une variable aléatoire T, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(T = k) = \lim_{N\to+\infty} P(T_N = k)$$

   et que T ne possède pas d'espérance mathématique.