PARTIE I

A **Q1** .. **Unicité**.. Soit $\hat{P}$ et $\hat{\varphi}$ deux éléments de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{s\},\ \hat{P}(x) = \frac{1}{x-s}\int_s^x P(t)\,dt = \hat{\varphi}(x)$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}-\{s\}$, $(\hat{P}-\hat{\varphi})(x) = 0$. $\hat{P}-\hat{\varphi} \in \mathbb{R}[X]$ et admet une infinité de zéro ; $\hat{P}-\hat{\varphi} = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Finalement : $\hat{P} = \hat{\varphi}$.

Existence.. $T : x \mapsto \int_s^x P(t)\,dt$ est une fonction polynomiale qui s'annule en s.

T est donc un élément de $\mathbb{R}[X]$ qui s'annule en s donc qui est divisible par $X-s$ (rappelons que nous confondons polynomes et fonctions polynomes !)
Soit $\hat{P}$ le quotient de T par $X-s$. $\hat{P} \in \mathbb{R}[X]$ et de plus :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $T(x) = (x-s)\hat{P}(x)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}-\{s\}$, $\hat{P}(x) = \frac{1}{x-s}T(x) = \frac{1}{x-s}\int_s^x P(t)\,dt$. Ceci achève de prouver l'existence.

Q2 Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(P,\varphi) \in \mathbb{R}[X]^2$.

(1). $\alpha\bar{u}(P)+\beta\bar{u}(\varphi) \in \mathbb{R}[X]$ et

$\forall x \in \mathbb{R}-\{s\}$, $(\alpha\bar{u}(P)+\beta\bar{u}(\varphi))(x) = \alpha\,\bar{u}(P)(x)+\beta\,\bar{u}(\varphi)(x) = \alpha\frac{1}{x-s}\int_s^x P(t)\,dt + \beta\frac{1}{x-s}\int_s^x \varphi(t)\,dt$ donc

(2). $\forall x \in \mathbb{R}-\{s\}$, $(\alpha\bar{u}(P)+\beta\bar{u}(\varphi))(x) = \frac{1}{x-s}\int_s^x (\alpha P+\beta\varphi)(t)\,dt$

(1) et (2) montrent que : $\widehat{\alpha P+\beta\varphi} = \alpha\bar{u}(P)+\beta\bar{u}(\varphi)$ donc que $\bar{u}(\alpha P+\beta\varphi) = \alpha\bar{u}(P)+\beta\bar{u}(\varphi)$.
Ceci achève de prouver la linéarité de $\bar{u}$.

Q3 a) Soit $P \in \operatorname{Ker}\bar{u}$. $\bar{u}(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{s\},\ \frac{1}{x-s}\int_s^x P(t)\,dt = 0$$

Ceci donne : $\forall x \in \mathbb{R}-\{s\}$, $\int_s^x P(t)\,dt = 0$ et même $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_s^x P(t)\,dt = 0$.

En dérivant on obtient alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$. Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

Par conséquent $\operatorname{Ker}\bar{u} = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Donc $\bar{u}$ est injective.

b) $\bar{u}(\mathbb{R}_n[X]) = \operatorname{Vect}(\bar{u}(1), \bar{u}(X), \dots, \bar{u}(X^k), \dots, \bar{u}(X^n))$. Posons $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $Q_k = \bar{u}(X^k)$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. $\forall x \in \mathbb{R}-\{s\}$, $Q_k(x) = \frac{1}{x-s}\int_s^x t^k\,dt = \frac{1}{k+1}\,\frac{x^{k+1}-s^{k+1}}{x-s} = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} x^i s^{k-i}$

Donc $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $Q_k = \bar{u}(X^k) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} s^{k-i}X^i$

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\deg \varphi_k = k$

Donc $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une famille de $n+1$ polynômes de degrés échelonnés ; c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

En conséquence : $\bar{u}(\mathbb{R}_n[X]) = \mathrm{Vect}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \mathbb{R}_n[X]$.

$$\underline{\underline{\bar{u}(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_n[X]}}.$$

Remarque.. On pouvait aussi remarquer que la restriction de $\bar{u}$ à $\mathbb{R}_n[X]$ définit un <u>endomorphisme</u> injectif de $\mathbb{R}_n[X]$ donc un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

c.. $\bar{u}$ est injectif. Montrons qu'il est bijectif. Il suffit de montrer qu'il est surjectif.

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrons que : $\exists P \in \mathbb{R}[X]$, $\bar{u}(P) = Q$.

$\exists n \in \mathbb{N}$, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

$Q \in \mathbb{R}_n[X] = \bar{u}(\mathbb{R}_n[X])$; donc $\exists P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\bar{u}(P) = Q$.

Finalement Q possède un antécédent par $\bar{u}$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ donc dans $\mathbb{R}[X]$.

CQFD <u>$\bar{u}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$</u>.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Posons $Q = \bar{u}^{-1}(P)$.

Alors : $\bar{u}(Q) = P$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\}$, $P(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x Q(t)\,dt$, mieux : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-a)P(x) = \int_a^x Q(t)\,dt$

Par dérivation : $P(x) + (x-a)P'(x) = Q(x)$

Finalement : $Q = P + (X-a)P'$

CQFD $\underline{\underline{\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \bar{u}^{-1}(P) = P + (X-a)P'}} = ((X-a)P)'$

B

Notons que Q3 prouve que u est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

(Q1).. d'après A Q3 b. $\forall k \in [\![0,3]\!]$, $u(X^k) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} a^{k-i} X^i$

Donc si $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$: $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{3}a^2 & \frac{1}{4}a^3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}a & \frac{1}{4}a^2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

$M_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure ; donc

$$\underline{\underline{\mathrm{Spec}\, u = \mathrm{Spec}(M_{\mathcal{B}}(u)) = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}\}}}$$

Nous posons désormais : $\underline{\lambda_0 = 1,\ \lambda_1 = 1/2,\ \lambda_2 = 1/3 \text{ et } \lambda_3 = 1/4}$. $(\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3)$.

(Q2). Posons pour tout $k \in [\![0,3]\!]$, $T_k = (X-a)^k$ et $\hat{T}_k = u(T_k)$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\}$, $\hat{T}_k(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x (t-a)^k\,dt = \frac{1}{(x-a)}\frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1}(x-a)^k$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{s\}$, $\hat{T}_k(x) = \frac{1}{k+1}(x-s)^k$

ceci vaut encore pour $x=s$ par passage à la limite (... continuité des fonctions).

Finalement : $\underline{\forall k \in [\![0,3]\!],\quad u((X-s)^k) = \frac{1}{k+1}(X-s)^k}$.

ou $\underline{\forall k \in [\![0,3]\!],\quad u(T_k) = \frac{1}{k+1}T_k}$ avec $T_k = (X-s)^k$ pour tout $k \in [\![0,3]\!]$.

Clairement (T_0, T_1, T_2, T_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ constituée de vecteurs propres de u. En particulier u est diagonalisable et $\forall k \in [\![0,3]\!]$. $\mathrm{Ker}(u - \lambda_k \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}) = \mathrm{Vect}(T_k)$.

Q3 La formule de Taylor donne si $P = X^3$:

$$X^3 = \sum_{k=0}^{3} \frac{P^{(k)}(s)}{k!}(X-s)^k = \sum_{k=0}^{3} \frac{3(3-1)\cdots(3-k+1)}{k!} s^{3-k}(X-s)^k$$

$$X^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k s^{3-k}(X-s)^k$$

Donc $\underline{X^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k s^{3-k} T_k = s^3 T_0 + 3s^2 T_1 + 3s T_2 + T_3}$

C

Q0 . Posons $R_0 = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$, $R_1 = (X-\lambda_0)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$, $R_2 = (X-\lambda_0)(X-\lambda_1)(X-\lambda_3)$ et $R_3 = (X-\lambda_0)(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$

Alors $L_0 = 4R_0$, $L_1 = -48R_1$, $L_2 = 108R_2$ et $L_3 = -64R_3$.

Clairement $L_0(\lambda_1) = L_0(\lambda_2) = L_0(\lambda_3) = 0$.

$L_0(\lambda_0) = 4(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3) = 4(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4}) = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 1$

Donc $\underline{L_0(\lambda_0) = 1 \text{ et } L_0(\lambda_1) = L_0(\lambda_2) = L_0(\lambda_3) = 0}$.

Plus généralement : $\forall i \in [\![0,3]\!]$, $\forall j \in [\![0,3]\!]$, $L_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$

L_0, L_1, L_2, L_3 sont les ~~polynômes~~ polynômes de Lagrange associés aux 4 points $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Notons encore que la famille (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et que si P est un élément de $\mathbb{R}_3[X]$ ses coordonnées dans cette base sont $P(\lambda_0), P(\lambda_1), P(\lambda_2), P(\lambda_3)$

$(P = \sum_{i=0}^{3} P(\lambda_i) L_i)$.

Q1 $1 \in \mathbb{R}_3[X]$; donc $1 = \sum_{i=0}^{3} 1 \times L_i = L_0 + L_1 + L_2 + L_3$!

Par conséquent : $\underline{L_0 + L_1 + L_2 + L_3 = 1}$.

De même $X \in \mathbb{R}_3[X]$, donc $X = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i L_i$ (X prend la valeur λ_i en λ_i).

Donc $\lambda_0 L_0 + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = X$

Soit : $\underline{\underline{L_0 + \frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{3} L_2 + \frac{1}{4} L_3 = X}}$.

Q2 Notons que $u - \lambda_0 e$, $u - \lambda_1 e$, $u - \lambda_2 e$ et $u - \lambda_3 e$ commutent deux à deux.

a) Donc $\ell(T_0) = [(u-\lambda_1 e) \circ (u-\lambda_2 e) \circ (u-\lambda_3 e)]((u-\lambda_0 e)(T_0))$.

Or $u(T_0) = \lambda_0 T_0$, donc $(u-\lambda_0 e)(T_0) = 0$.

Par conséquent $\ell(T_0) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$.

De même $\ell(T_1) = \ell(T_2) = \ell(T_3) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$.

Par conséquent ℓ coïncide avec l'application linéaire nulle sur la base (T_0, T_1, T_2, T_3) de $\mathbb{R}_3[X]$

Donc $\underline{\underline{\ell = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])}}}$. L est un polynôme annulateur de u. C'est aussi le polynôme caractéristique de u.

b) Etudier $\ell_0^2 - \ell_0$. Notons que : $\ell_0 = L_0(u) = 4\,(u-\lambda_1 e)\circ(u-\lambda_2 e)\circ(u-\lambda_3 e)$

$$\frac{1}{4}\ell_0(T_0) = [(u-\lambda_1 e)\circ(u-\lambda_2 e)\circ]((u-\lambda_3 e)(T_0))$$
$$= [(u-\lambda_1 e)\circ(u-\lambda_2 e)](u(T_0) - \lambda_3 T_0)$$
$$= [(u-\lambda_1 e)\circ(u-\lambda_2 e)]((\lambda_0-\lambda_3)T_0) = (\lambda_0-\lambda_3)(u-\lambda_1 e)((u-\lambda_2 e)(T_0))$$
$$= (\lambda_0-\lambda_3)(\lambda_0-\lambda_2)(u-\lambda_1 e)(T_0) = (\lambda_0-\lambda_3)(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_0-\lambda_1)T_0$$

$\frac{1}{4}\ell_0(T_0) = (1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{2})T_0 = \frac{1}{4}T_0$; $\underline{\ell_0(T_0) = T_0}$

$\frac{1}{4}\ell_0(T_1) = ((u-\lambda_2 e)\circ(u-\lambda_3 e))[\underbrace{(u-\lambda_1 e)(T_1)}_{=0}] = 0$; $\underline{\ell_0(T_1) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}}$

De même $\underline{\ell_0(T_2) = \ell_0(T_3) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}}$

Finalement : $(\ell_0^2 - \ell_0)(T_0) = \ell_0(\ell_0(T_0)) - \ell_0(T_0) = \ell_0(T_0) - T_0 = T_0 - T_0 = 0$

$\forall i \in [\![1,3]\!]$ $(\ell_0^2 - \ell_0)(T_i) = \ell_0^2(T_i) - \ell_0(T_i) = 0$

Par conséquent : $\ell_0^2 - \ell_0$ coïncide avec $0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])}$ sur la base (T_0, T_1, T_2, T_3) de $\mathbb{R}_3[X]$

Et donc $\ell_0^2 - \ell_0 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])}$

Finalement : $\underline{\underline{\ell_0^2 = \ell_0}}$; comme ℓ est linéaire : ℓ_0 est une projection de $\mathbb{R}_3[X]$

De la même manière $\ell_1^2 = \ell_1$, $\ell_2^2 = \ell_2$ et $\ell_3^2 = \ell_3$. ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sont des projections de $\mathbb{R}_3[X]$.

c.. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. ℓ_k est une projection

$\mathrm{Im}\, \ell_k = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \ell_k(P) = P\}$. $\mathrm{Vect}(T_k) \subset \mathrm{Im}\, \ell_k$; $\dim \mathrm{Im}\, \ell_k \geqslant 1$

$\forall i \in [\![0,3]\!] - \{k\}$, $\ell_k(T_i) = 0$; $\forall i \in [\![0,3]\!] - \{k\}$, $T_i \in \mathrm{Ker}\, \ell_k$; $\dim \mathrm{Ker}\, \ell_k \geqslant 3$.

Comme $\dim \mathrm{Im}\, \ell_k + \dim \mathrm{Ker}\, \ell_k = \dim \mathbb{R}_3[X] = 4$: $\dim \mathrm{Ker}\, \ell_k = 3$ et $\dim \mathrm{Im}\, \ell_k = 1$

Rmq : $\mathrm{Ker}\, \ell_k = \mathrm{Vect}(T_{i_1}, T_{i_2}, T_{i_3})$ où $\{i_1, i_2, i_3\} = [\![0,3]\!] - \{k\}$ et

$\mathrm{Im}\, \ell_k = \mathrm{Vect}(T_k)$

ℓ_0 est donc la projection de base $\mathrm{Vect}(T_0)$ et de direction $\mathrm{Vect}(T_1, T_2, T_3)$
ℓ_1 ——— $\mathrm{Vect}(T_1)$ ——— $\mathrm{Vect}(T_0, T_2, T_3)$
ℓ_2 ——— $\mathrm{Vect}(T_2)$ ——— $\mathrm{Vect}(T_0, T_1, T_3)$
ℓ_3 ——— $\mathrm{Vect}(T_3)$ ——— $\mathrm{Vect}(T_0, T_1, T_2)$

Soit $(i,j) \in [\![0,3]\!]$ tel que : $i \neq j$

$\forall k \in [\![0,3]\!] - \{i,j\}$, $(\ell_i \circ \ell_j)(T_k) = \ell_i(0) = 0$

$(\ell_i \circ \ell_j)(T_i) = \ell_i(0) = 0$

$(\ell_i \circ \ell_j)(T_j) = \ell_i(T_j) = 0$.

Donc $\forall k \in [\![0,3]\!]$, $(\ell_i \circ \ell_j)(T_k) = 0$. $\ell_i \circ \ell_j = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])}$ pour tout $(i,j) \in [\![0,3]\!]^2$ et $i \neq j$.

d.. Montrons que la famille $(\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)$ est libre.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $\sum_{i=0}^{3} \alpha_i \ell_i = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])}$.

$\forall k \in [\![0,3]\!]$, $0 = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i \ell_i(T_k) = \alpha_k T_k$; $\forall k \in [\![0,3]\!]$, $\alpha_k = 0$ ... cqfd.

$(\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)$ est libre donc $\dim(\mathrm{Vect}(\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)) = 4$.

$\ell_0 = 4(u - \lambda_1 e) \circ (u - \lambda_2 e) \circ (u - \lambda_3 e) = 4(u^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) u^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) u - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 e)$

Donc $\ell_0 \in \mathrm{Vect}(e, u, u^2, u^3)$.

De même on montre que ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sont dans $\mathrm{Vect}(e, u, u^2, u^3)$.

Finalement $\mathrm{Vect}(\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3) \subset \mathrm{Vect}(e, u, u^2, u^3)$

En particulier $\dim(\mathrm{Vect}(e, u, u^2, u^3)) \geqslant 4$. Or (e, u, u^2, u^3) est une famille génératrice de 4 éléments de $\mathrm{Vect}(e, u, u^2, u^3)$; donc $\dim(\mathrm{Vect}(e, u, u^2, u^3)) \leqslant 4$.

Finalement $\dim \mathrm{Vect}(e, u, u^2, u^3) = 4 = \dim \mathrm{Vect}(\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)$; comme le second est contenu dans le premier : $\mathrm{Vect}(\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3) = \mathrm{Vect}(e, u, u^2, u^3)$.

PARTIE II

A

Q1 Unicité.. Même raisonnement que dans I A Q1

Existence.. $S : x \mapsto \int_a^x \left(\int_a^y P(t)\,dt\right) dy$ est une fonction polynomiale.

$S(a)=0$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $S'(x)=\int_a^x P(t)\,dt$; $S(a)=S'(a)=0$.

Le polynôme S est donc divisible par $(X-a)^2$. Soit $\tilde{P}$ le quotient dans la division de S par $(X-a)^2$. $\tilde{P}\in\mathbb{R}[X]$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $(x-a)^2\tilde{P}(x)=S(x)$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}-\{a\}$, $\tilde{P}(x)=\frac{1}{(x-a)^2}S(x)=\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x\left[\int_a^y P(t)\,dt\right]dy$

$\tilde{P}$ est bien solution du problème. Ceci achève de prouver l'existence.

Q2 a) Posons $H=X+1$ et $\check{V}=\tilde{V}(X+1)$.

$\forall x\in\mathbb{R}-\{a\}$, $\tilde{V}(x)=\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x\left(\int_a^y (t+1)\,dt\right)dy$

$\forall x\in\mathbb{R}-\{a\}$, $\tilde{V}(x)=\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x \frac{(y+1)^2-(a+1)^2}{2}\,dy$

$\forall x\in\mathbb{R}-\{a\}$, $\tilde{V}(x)=\frac{1}{(x-a)^2}\times\frac{1}{2}\left[\frac{(x+1)^3}{3}-\frac{(a+1)^3}{3}-(a+1)^2(x-a)\right]$

$\forall x\in\mathbb{R}-\{a\}$, $\tilde{V}(x)=\frac{1}{(x-a)^2}\times\frac{1}{6}(x-a)\left[(x+1)^2+(x+1)(a+1)+(a+1)^2-3(a+1)^2\right]$

$\forall x\in\mathbb{R}-\{a\}$, $\tilde{V}(x)=\frac{1}{(x-a)^2}\times\frac{1}{6}(x-a)\left[x^2+3x+xa-2a^2-3a\right]=\frac{1}{6}\frac{1}{(x-a)^2}(x-a)^2(x+2a+3)=\frac{x+2a+3}{6}$

Finalement : $\underline{\underline{\tilde{v}(X+1)=\frac{1}{6}(X+2a+3).}}$

b) Je vous laisse la linéarité.

Montrons cette fois directement que $\tilde{v}$ est bijective.

Soit $Q\in\mathbb{R}[X]$. Montrons que : $\exists!\,P\in\mathbb{R}[X]$, $\tilde{v}(P)=Q$

Analyse .. (unicité).

Supposons que : $P\in\mathbb{R}[X]$, et $\tilde{V}(P)=Q$

$\forall x\in\mathbb{R}-\{a\}$, $Q(x)=\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x\left(\int_a^y P(t)\,dt\right)dy$.

$\forall x\in\mathbb{R}-\{a\}$, $Q(x)(x-a)^2=\int_a^x\left(\int_a^y P(t)\,dt\right)dy$.

Mieux $\forall x\in\mathbb{R}$, $Q(x)(x-a)^2=\int_a^x\left(\int_a^y P(t)\,dt\right)dy$.

Par dérivation :

$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi'(x)(x-a)^2+\varphi(x)\,2(x-a)=\int_a^x P(t)\,dt$. Dérivons encore :

$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi''(x)(x-a)^2+4\varphi'(x)(x-a)+2\varphi(x)=P(x)$

Donc $P=\varphi''(X-a)^2+4\varphi'(X-a)+2\varphi=(\varphi(X-a)^2)''$

Ceci montre l'unicité de P.

<u>Synthèse</u> ..(Existence). Posons $P=[\varphi(X-a)^2]''$. $P\in\mathbb{R}[X]$. Prouvons que $\bar{v}(P)=\varphi$

soit à montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{a\},\ \varphi(x)=\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x(\int_a^y P(t)\,dt)\,dy$

Posons $H=\varphi(X-a)^2$, a est racine d'ordre 2 de φ ; $H(a)=H'(a)=0$

$\forall y\in\mathbb{R},\ \int_a^y P(t)\,dt=\int_a^y H''(t)\,dt=H'(y)-H'(a)=H'(y)$ car $H'(a)=0$

$\forall x\in\mathbb{R},\ \int_a^x(\int_a^y P(t)\,dt)\,dy=\int_a^x H'(y)\,dy=H(x)-H(a)=H(x)=\varphi(x)(x-a)^2$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}-\{a\},\ \varphi(x)=\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x(\int_a^y P(t)\,dt)\,dy$ ... cqfd.

$\forall\varphi\in\mathbb{R}[X],\ \exists!\,P\in\mathbb{R}[X],\ \bar{v}(P)=\varphi$; $\bar{v}$ est bijective.

Notons encore que l'antécédent de φ ($\varphi\in\mathbb{R}[X]$) par $\bar{v}$ est : $[(X-a)^2\varphi]''$

donc $\forall\varphi\in\mathbb{R}[X],\ \bar{v}^{-1}(\varphi)=[(X-a)^2\varphi]''$

ou $\underline{\forall P\in\mathbb{R}[X]\ ,\ \bar{v}^{-1}(P)=[(X-a)^2\varphi]''=2\varphi+4(X-a)\varphi'+(X-a)^2\varphi''}$

B | (Q1). Soit $P\in\mathbb{R}_3[X]$. $S:x\mapsto\int_a^x(\int_a^y P(t)\,dt)\,dy$ est polynomiale de degré inférieur ou égale à 5. $\bar{v}(P)$ qui est le quotient de S par $(X-a)^2$ est donc de degré " " " 3.

Par conséquent : $\forall P\in\mathbb{R}_3[X],\ \bar{v}(P)\in\mathbb{R}_3[X]$.

La restriction v de $\bar{v}$ à $\mathbb{R}_3[X]$ est donc une application linéaire <u>injective</u> de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$. Par conséquent v est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

(Q2) Soit $k\in[\![0,3]\!]$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ \int_a^x(\int_a^y(t-a)^k\,dt)\,dy=\int_a^x\frac{1}{k+1}(t-a)^{k+1}dt=\frac{1}{(k+1)(k+2)}[(x-a)^{k+2}]$

$\forall x\in\mathbb{R}-\{a\},\ \frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x(\int_a^y(t-a)^k\,dt)\,dy=\frac{1}{(k+1)(k+2)}T_k(x)$. Donc $\underline{v(T_k)=\frac{1}{(k+1)(k+2)}T_k}$.

$M_{(T_0,T_1,T_2,T_3)}(v) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/20 \end{bmatrix}$. Notons B cette matrice et A celle de u dans la base (T_0,T_1,T_2,T_3). $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

à méditer

$P(u) = v \Leftrightarrow P(A) = B \Leftrightarrow P\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/20 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(1/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P(1/3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P(1/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/20 \end{bmatrix}$

$P(u) = v \Leftrightarrow P(1) = 1/2$, $P(1/2) = 1/6$, $P(1/3) = 1/12$ et $P(1/4) = 1/20$

$P(u) = v \Leftrightarrow P(\lambda_0) = 1/2$, $P(\lambda_1) = 1/6$, $P(\lambda_2) = 1/12$ et $P(\lambda_4) = 1/20$.

Clairement, d'après I C Q 0 : $P = \frac{1}{2}L_0 + \frac{1}{6}L_1 + \frac{1}{12}L_2 + \frac{1}{20}L_3$ convient.

Q3.. $M_{(T_0,T_1,T_2,T_3)}(v - u^2) = B - A^2 = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/80 \end{bmatrix}$ est inversible.

Par conséquent $v - u^2$ est bijectif.

C

Q1 $A'(X) = \sum_{k=1}^{4} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{4} (X - \alpha_i)$. Soit $p \in [\![1,4]\!]$

$A'(\alpha_p) = \underbrace{\sum_{k=1}^{4} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{4} (\alpha_p - \alpha_i)}_{\text{vaut 0 si } k \text{ n'est pas } p} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{4} (\alpha_p - \alpha_i)$

Finalement : $A_p = \dfrac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{4} (X - \alpha_i)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{4} (\alpha_p - \alpha_i)}$. Donc $\forall q \in [\![1,4]\!]$, $A_p(\alpha_q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq p \\ 1 & \text{si } q = p. \end{cases}$

A_1, A_2, A_3, A_4 sont les polynômes de Lagrange associés à $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Q2 Soit $p \in [\![1,5]\!]$. g_p est une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}$.

De plus $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (\varphi_1,\varphi_2) \in \mathbb{R}_3[X]^2$, $g_p(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \widetilde{(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)}(\alpha_p) \overset{\text{linéaire}}{=} (\alpha\tilde{\varphi}_1 + \beta\tilde{\varphi}_2)(\alpha_p)$

$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (\varphi_1,\varphi_2) \in \mathbb{R}_3[X]$, $g_p(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha\tilde{\varphi}_1(\alpha_p) + \alpha\tilde{\varphi}_2(\alpha_p) = g_p(\varphi_1) + g_p(\varphi_2)$.

Donc g_p est linéaire pour tout $p \in [\![1,5]\!]$.

cl.. Pour tout $p \in [\![1,5]\!]$, g_p est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

(Q2) Notons que $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}_3[X] = 4$

Par conséquent si l'on pose $F = \mathrm{Vect}(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)$, $\dim F \leq 4$.

En fait nous allons montrer que (g_1, g_2, g_3, g_4) est une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R})$ donc une base de cette espace. Nous aurons ainsi $F = \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R})$ donc $\dim F = 4$.

Soit $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $\gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \gamma_3 g_3 + \gamma_4 g_4 = 0$

$\forall \varphi \in \mathbb{R}_3[X]$, $\gamma_1 g_1(\varphi) + \gamma_2 g_2(\varphi) + \gamma_3 g_3(\varphi) + \gamma_4 g_4(\varphi) = 0$.

$\forall \varphi \in \mathbb{R}_3[X]$, $\gamma_1 \tilde{\varphi}(\alpha_1) + \gamma_2 \tilde{\varphi}(\alpha_2) + \gamma_3 \tilde{\varphi}(\alpha_3) + \gamma_4 \tilde{\varphi}(\alpha_4) = 0$

En particulier $\gamma_1 \tilde{T}_k(\alpha_1) + \gamma_2 \tilde{T}_k(\alpha_2) + \gamma_3 \tilde{T}_k(\alpha_3) + \gamma_4 \tilde{T}_k(\alpha_4) = 0$ pour tout $k \in [\![0,3]\!]$

$\forall k \in [\![0,3]\!]$, $\frac{1}{(k+1)(k+2)}(\gamma_1 T_k(\alpha_1) + \gamma_2 T_k(\alpha_2) + \gamma_3 T_k(\alpha_3) + \gamma_4 T_k(\alpha_4)) = 0$.

$\forall k \in [\![0,3]\!]$, $\gamma_1(\alpha_1 - \lambda)^k + \gamma_2(\alpha_2 - \lambda)^k + \gamma_3(\alpha_3 - \lambda)^k + \gamma_4(\alpha_4 - \lambda)^k = 0$.

Posons $t_1 = \alpha_1 - \lambda$, $t_2 = \alpha_2 - \lambda$, $t_3 = \alpha_3 - \lambda$, $t_4 = \alpha_4 - \lambda$.

Alors $\forall k \in [\![0,3]\!]$, $\gamma_1 t_1^k + \gamma_2 t_2^k + \gamma_3 t_3^k + \gamma_4 t_4^k = 0$. Ceci s'exprime matriciellement de la manière suivante

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 & t_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nous aurons immédiatement $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$ si nous prouvons que la matrice $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 & t_4^3 \end{bmatrix}$ est inversible. Cela revient encore à prouver que : ${}^tT = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 \\ 1 & t_4 & t_4^2 & t_4^3 \end{bmatrix}$

Remarque. On peut aussi prouver l'inversibilité de ${}^tT$ en en cherchant une réduite de Gauss.

$\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$, posons $\varphi(P) = (P(t_1), P(t_2), P(t_3), P(t_4))$.

φ est clairement une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont distincts ; par conséquent t_1, t_2, t_3, t_4 aussi.

Soit $P \in \operatorname{Ker} \varphi$. $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et $P(t_1) = P(t_2) = P(t_3) = P(t_4) = 0$; $P = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$ (... 4 zéros ...)

φ est donc injective. Comme $\dim \mathbb{R}_3[X] = \dim \mathbb{R}^4$, φ est un isomorphisme.

Or la matrice de φ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}^4$ n'est autre que ${}^tT$

Donc ${}^tT$ est inversible, T aussi.

Finalement $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$

Ceci achève de prouver que (g_1, g_2, g_3, g_4) est libre.

Par conséquent <u>$\dim \mathrm{Vect}(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) = 4$.</u>

(Q3) <u>Analysons la situation</u>

Rappelons déjà que : $\forall (p,q) \in [\![1,4]\!]^2$, $A_p(\alpha_q) = \begin{cases} 1 \text{ si } q=p \\ 0 \text{ si } q \neq p \end{cases}$.

Soit $(B_1,B_2,B_3,B_4) \in \mathbb{R}_3[X]^4$

$\forall (p,q) \in [\![1,4]\!]^2$, $g_p(B_q) = \begin{cases} 1 \text{ si } q=p \\ 0 \text{ si } q \neq p \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\forall (p,q) \in [\![1,4]\!]^2$, $\widetilde{B_q}(\alpha_p) = \begin{cases} 1 \text{ si } q=p \\ 0 \text{ si } q \neq p \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\forall q \in [\![1,4]\!]$, $\widetilde{B_q}(\alpha_p) \overset{?}{=} A_q(\alpha_p)$ pour tout $p \in [\![1,4]\!]$

$\Updownarrow$ (2 éléments de $\mathbb{R}_3[X]$ qui coïncident en 4 pts sont égaux).

$\forall q \in [\![1,4]\!]$, $\widetilde{B_q} = A_q$

$\Updownarrow$

$\forall q \in [\![1,4]\!]$, $v(B_q) = A_q$

$\Updownarrow$

$\forall q \in [\![1,4]\!]$, $B_q = v^{-1}(A_q) = \left((X-1)^2 A_q\right)''$

ce qui montre l'existence (et l'unicité) de B_1, B_2, B_3, B_4 tels que : $\forall (p,q) \in [\![1,4]\!]^2$, $g_p(B_q) = \begin{cases} 1 \text{ si } q=p \\ 0 \text{ si } q \neq p \end{cases}$.

(Q4) Rappel.. $\forall k \in [\![0,3]\!]$, $T_k = (X-1)^k$

Soit $p \in [\![1,4]\!]$. La formule de Taylor donne : $B_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{(X-1)^k}{k!} B_p^{(k)}(1)$

donc $\underline{\underline{B_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{B_p^{(k)}(1)}{k!} T_k}}$

$B_p = v^{-1}(A_p) = \left((X-1)^2 A_p\right)'' = 2A_p + 4(X-1)A'_p + (X-1)^2 A''_p$; $B_p(1) = 2A_p(1)$

$B'_p = \left((X-1)^2 A_p\right)''' = 0 + 3\times 2 A'_p + 3\times 2(X-1)A''_p + (X-1)^2 A'''_p$; $B'_p(1) = 6A'_p(1)$

$B''_p = \left((X-1)^2 A_p\right)^{(4)} \underset{\text{Leibniz}}{=} 0 + 0 + 6\times 2 A''_p + 4\times 2(X-1)A'''_p + 0$; $B''_p(1) = 12 A''_p(1)$; $\dfrac{B''_p(1)}{2!} = 6A''_p(1)$

$B'''_p = \left((X-1)^2 A_p\right)^{(5)} = 0 + 0 + 0 + 10\times 2\times A'''_p + 0 + 0$; $B'''_p(1) = 20 A'''_p(1)$; $\dfrac{B'''_p(1)}{3!} = \dfrac{10}{3} A'''_p(1)$

Finalement : $\underline{\underline{\forall p \in [\![1,4]\!],\ B_p = 2A_p(1)T_0 + 6A'_p(1)T_1 + 6A''_p(1)T_2 + \frac{10}{3}A'''_p(1)T_3}}$.

D

(Q1) Soient a_1, a_2, a_3 et a_4 les coordonnées de g_5 sur la base (g_1, g_2, g_3, g_4) de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R})$. $g_5 = a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3 + a_4 g_4$

$\forall k \in [\![1,4]\!]$, $g_5(B_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} a_i g_i(B_k) = a_k g_k(B_k) = a_k$

donc $\forall k \in [\![1,4]\!]$, $a_k = g_5(B_k) = \widetilde{B_k}(\alpha_5) = v(B_k)(\alpha_5) = A_k(\alpha_5)$.

Finalement $\underline{\underline{g_5 = A_1(\alpha_5)g_1 + A_2(\alpha_5)g_2 + A_3(\alpha_5)g_3 + A_4(\alpha_5)g_4}}$.

(Q2). Il est clair que f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_3[X]$

Comme pour g_5 on a $f = f(B_1)g_1 + f(B_2)g_2 + f(B_3)g_3 + f(B_4)g_4$.

$\forall k \in [\![1,4]\!],\ f(B_k) = (\widetilde{B_k})'(\alpha_5) = (v(B_k))'(\alpha_5) = A_k'(\alpha_5)$

$$\underline{f = A_1'(\alpha_5)g_1 + A_2'(\alpha_5)g_2 + A_3'(\alpha_5)g_3 + A_4'(\alpha_5)g_4.}$$

(Q3) On a encore $f_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R})$ et $f_i = f_i(B_1)g_1 + f_i(B_2)g_2 + f_i(B_3)g_3 + f_i(B_4)g_4$ $(i \in [\![1,4]\!])$.

Soit $k \in [\![1,4]\!]$

$f_i(B_k) = \hat{B}_k(\alpha_i) = u(B_k)(\alpha_i)$

Etablissons un passage entre u et v.

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-a)^2(v(P))(x) = \int_a^x \left(\int_a^y P(t)dt\right)dy$

Par dérivation :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $2(x-a)\,v(P)(x) + (x-a)^2(v(P))'(x) = \int_a^x P(t)\,dt = (x-a)\,u(P)(x)$

Donc $2(X-a)v(P) + (X-a)^2(v(P))' = (X-a)u(P)$.

Divisons par $X-a$, on obtient $2v(P) + (X-a)(v(P))' = u(P)$

Soit $\underline{u(P) = 2v(P) + (X-a)v(P)'}$

Finalement : $f_i(B_k) = u(B_k)(\alpha_i) = 2v(B_k)(\alpha_i) + (\alpha_i - a)(v(B_k))'(\alpha_i)$

$f_i(B_k) = 2A_k(\alpha_i) + (\alpha_i - a)A_k'(\alpha_i)$.

Finalement $$\underline{f_i = \sum_{k=1}^{4}\left[2A_k(\alpha_i) + (\alpha_i - a)A_k'(\alpha_i)\right]g_k.}$$

PARTIE III

Notons que : $a = 0$. (T_0, T_1, T_2, T_3) est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Rappelons que : $\forall p \in [\![1,4]\!]$, $A_p = \dfrac{\prod_{i=1, i\neq p}^{4}(X - \alpha_i)}{\prod_{i=1, i\neq p}^{4}(\alpha_p - \alpha_i)}$

On a alors $A_1 = \dfrac{(X+1)(X+2)(X-2)}{(1+1)(1+2)(1-2)} = -\frac{1}{6}(X^3+X^2-4X-4)$; en particulier $\overbrace{A_1(0) = \frac{2}{3}\ ;\ A_1'(0) = +\frac{2}{3}}^{\text{Taylor}}$; $A_1''(0) = -\frac{1}{3}$; $A_1'''(0) = -1$

$A_2 = \dfrac{(X-1)(X+2)(X-2)}{(-1-1)(-1+2)(-1-2)} = \frac{1}{6}(X^3-X^2-4X+4)$; donc $A_2(0) = \frac{2}{3}$; $A_2'(0) = -\frac{2}{3}$; $A_2''(0) = -\frac{1}{3}$; $A_2'''(0) = 1$

$A_3 = \dfrac{(X-1)(X+1)(X+2)}{(2-1)(2+1)(2+2)} = \frac{1}{12}(X^3+2X^2-X-2)$; donc $A_3(0) = -\frac{1}{6}$; $A_3'(0) = -\frac{1}{12}$; $A_3''(0) = \frac{1}{3}$; $A_3'''(0) = \frac{1}{2}$

$A_4 = \dfrac{(X-1)(X+1)(X-2)}{(-2-1)(-2+1)(-2-2)} = -\frac{1}{12}(X^3-2X^2-X+2)$; donc $A_4(0) = -\frac{1}{6}$; $A_4'(0) = \frac{1}{12}$; $A_3''(0) = \frac{1}{3}$; $A_3'''(0) = -\frac{1}{2}$

Q1

$B_1 = 2A_1(0)T_0 + 6A_1'(0)T_1 + 6A_1''(0)T_2 + \frac{10}{3}A_1'''(0)T_3$

donc $B_1 = 2\times\frac{2}{3} + 6\times\frac{2}{3}X + 6\times\left(-\frac{1}{3}\right)X^2 + \frac{10}{3}(-1)X^3$

Soit $B_1 = -\frac{10}{3}X^3 - 2X^2 + 4X + \frac{4}{3}$.

De même $B_2 = \frac{10}{3}X^3 - 2X^2 - 4X + \frac{4}{3}$. (résulte en fait de B_1 en remarquant que $A_2(X) = A_1(-X)$).

$B_3 = \frac{5}{3}X^3 + 2X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{3}$

$B_4 = -\frac{5}{3}X^3 + 2X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{3}$

Q2 $g_5 = A_1(\alpha_5)g_1 + A_2(\alpha_5)g_2 + A_3(\alpha_5)g_3 + A_4(\alpha_5)g_4$

$\alpha_5 = 3$. $A_1(3) = -\frac{10}{3}$; $A_2(3) = \frac{5}{3}$; $A_3(3) = \frac{10}{3}$; $A_4(3) = -\frac{2}{3}$

$g_5 = -\frac{10}{3}g_1 + \frac{5}{3}g_2 + \frac{10}{3}g_3 - \frac{2}{3}g_4$.

Exercice .. (pour moi !) Ecrire une remarque savante sur la dualité intervenant dans le problème.