MATHEMATIQUES 2ème épreuve (4 h)

Les deux parties du problème sont largement indépendantes. Seules les questions II.4 et II.5 utilisent des résultats obtenus dans la partie I.

- I -

n désignant un entier naturel, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à n et du polynôme nul. Un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ est noté indifféremment P ou $P(X)$.

1 - a) Montrer que, pour tout entier k appartenant à $\{0, 1, \ldots, n\}$, il existe un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, unique, $L_{k,n} = (-1)^{n-k} \dfrac{C_n^k}{n!} \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} (X-i)$, satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\} \quad L_{k,n}(i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k. \\ 1 \text{ si } i = k. \end{cases}$$

b) Montrer que $(L_{0,n} ; L_{1,n} ; \ldots ; L_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base ?

En déduire la formule $\sum\limits_{k=0}^{n} L_{k,n} = 1$ et la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X-1)\,(X-2)\ldots(X-n)}$.

c) Soit Π la matrice de passage de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base $(L_{0,n} ; L_{1,n} ; \ldots ; L_{n,n})$. On ne demande pas d'écrire Π mais de donner : 1) les éléments de la première ligne,

2) la somme des éléments de toute autre ligne,

3) la somme des éléments des différentes colonnes.

Ecrire la matrice Π^{-1} inverse de Π.

2 - a) Montrer que $(L_{0,0} ; L_{1,1} ; L_{2,2} ; \ldots ; L_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $\Delta : \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \longmapsto P(X+1)-P(X) \end{array}$. L'image d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ par Δ, soit $\Delta(P)$, sera notée plus simplement ΔP, dans la suite.

Montrer que l'application Δ est linéaire. Ecrire sa matrice dans la base $(L_{0,0} ; L_{1,1} ; \ldots ; L_{n,n})$. En déduire le noyau et l'image de Δ.

c) On note Δ^0 l'identité sur $\mathbb{R}_n[X]$ et pour $i \geq 1$ $\Delta^i = \Delta \circ \Delta^{i-1}$.

P appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$, montrer que sa décomposition sur la base $(L_{0,0} ; L_{1,1} ; \ldots ; L_{n,n})$ s'écrit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} (\Delta^k P)(0)\, L_{k,k}$.

.../...

3 - (a) f désignant une fonction réelle de variable réelle, on note désormais Δf la fonction définie pour tout x tel que $f(x+1)$ et $f(x)$ existent, par $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x)$, et par récurrence, pour $i > 1$ $\Delta^i f = \Delta(\Delta^{i-1} f)$. On convient enfin que $\Delta^0 f = f$. Soit alors f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,n]$. Montrer qu'il existe un polynôme unique $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} \quad f(k) = P_f(k) .$$

(b) Montrer que : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-i\}$ $(\Delta^i f)(k) = (\Delta^i P_f)(k)$.

En déduire que : $f(n) = \sum_{k=0}^{n} (\Delta^k f)(0)\, L_{k,k}(n)$ (1)

(c) a désignant un réel tel que $a > n$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{a-x}$. Montrer par récurrence que : $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $(\Delta^k f)(x) = \dfrac{k!}{(a-x)(a-1-x)\ldots(a-k-x)}$.

Ecrire la relation (1) pour f et en déduire que, si N est un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel tel que $x \geqslant N$:

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{N(N-1)\ldots(N-k)}{x(x-1)\ldots(x-k)} = \frac{N(N-1)}{x(x-N+1)}$$

- II -

Préliminaire : 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$; montrer que la série $\sum P(X=n)u^n$ converge pour tout $u \in [0,1]$. La fonction : $\begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)u^n \end{array}$ est appelée fonction génératrice de la variable aléatoire X .

2. Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction génératrice de la variable $X+Y$ est égale au produit des fonctions génératrices de X et de Y .

Dans cette partie, N désigne un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On effectue des tirages successifs "au hasard et avec remise" d'une boule de cette urne et l'on s'intéresse au numéro marqué sur chaque boule tirée.

Pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant N-1$, X_n désigne le nombre aléatoire de tirages nécessaires à l'obtention de $(n+1)$ numéros distincts, et l'on note :

$$Y_1 = X_1 - 1 \;,\; Y_2 = X_2 - X_1 \;,\; \ldots,\; Y_n = X_n - X_{n-1} .$$

On remarquera que : $P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = \ldots = P(Y_n = 0) = 0$.

1 - (a) Quelle est la probabilité que les k $(k \geqslant 2)$ premières boules tirées portent le même numéro ?

(b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_1 .

(c) Donner l'espérance mathématique, la variance et la fonction génératrice de chacune des variables aléatoires Y_1 et X_1 .

.../...

2 - a) $(p, n, k) \in (\mathbb{N}^*)^3$ $p \geq n \geq 2$. Calculer la probabilité conditionnelle, sachant que $X_{n-1} = p$, de l'évènement $Y_n = k$. Dépend-elle de p ?

b) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_n , son espérance mathématique, sa variance et sa fonction génératrice.

3 - Déterminer l'espérance mathématique, la variance et la fonction génératrice f_n de la variable aléatoire X_n .

4 - a) Montrer que, pour $x > N$: $f_n(\frac{N}{x}) = \frac{N(N-1)\ldots(N-n)}{x(x-1)\ldots(x-n)}$.

b) Utiliser la décomposition en éléments simples obtenue au I-1-b pour montrer que : $f_n(u) = C_{N-1}^n \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{C_n^k \, u}{1-\frac{k}{N}u} \right)$.

c) En déduire, pour $i \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = i)$.

Quelle remarque peut-on faire, à propos du résultat obtenu ?

5 - a) Trouver, en utilisant I-3-c, une expression simple de $\sum_{n=1}^{N-1} f_n(u)$.

b) Quelle est la probabilité d'obtenir au $p^{\text{ème}}$ tirage ($p \geq 2$) un numéro non encore sorti ?

c) En déduire l'espérance mathématique du nombre aléatoire de numéros distincts sortis en n tirages ($n \geq 1$) et la limite de cette espérance quand n tend vers $+\infty$. Etait-ce prévisible ?

6 - Application : On suppose dans cette question que N et n variables sont liés par $N = \alpha\,(n+1)$ où α désigne un rationnel fixé, supérieur ou égal à 1.

a) Montrer que, si $\alpha > 1$, $\frac{E(X_n)}{n}$ et $\frac{V(X_n)}{n}$ admettent, quand n tend vers $+\infty$, des limites $\ell(\alpha)$ et $v(\alpha)$ que l'on précisera.

Donner les limites L de $\ell(\alpha)$ et V de $v(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$ ainsi que des équivalents simples de $\ell(\alpha)-L$ et $v(\alpha)-V$.

b) Montrer que, si $\alpha = 1$, $\frac{E(X_n)}{n}$ et $\frac{V(X_n)}{n}$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Donner des équivalents de $E(X_n)$ et $V(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ (on admettra que, si n tend vers $+\infty$, $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$ est équivalent à $\operatorname{Log} n$ et que $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$) .